

Reconstruction tomographique pour l'imagerie 3-photons basée sur des caméras hybrides TEP/Compton

04/03/2026

Mehdi LATIF

Composition du Jury :

Rapportrices :	Emilie CHOUZENOUX Voichita MAXIM	Directrice de recherche, INRIA, Saclay Professeure des universités, INSA, Lyon
Examineurs :	Alexandre BOUSSE Claude COMTAT	Chargé de recherche, INSERM, Brest Ingénieur - Chercheur CEA, SHFJ, Orsay
Invité :	Nicolas BEAUPERE	Maître de conférence, IMT Atlantique, Nantes
Dir. de thèse :	Jérôme IDIER	Directeur de Recherche, CNRS, ECN, Nantes
Encadr. de thèse :	Simon STUTE	Ingénieur de recherche, CHU de Nantes
Encadr. de thèse :	Thomas CARLIER	Physicien médical, CHU de Nantes

Imagerie fonctionnelle :

Fournit une image de l'**activité fonctionnelle et métabolique** des organes, inaccessible à l'imagerie anatomique.

Principe général :

injection d'un **médicament radiopharmaceutique** :

molécule vectrice + **isotope radioactif** ;

l'isotope émet des **rayonnements** lors de sa désintégration ;

les rayonnements émis sont détectés par un **tomographe**.

⇒ une **image 3D** de la **distribution du radiotraceur** est reconstruite à partir de l'**ensemble des rayonnements** détectés.

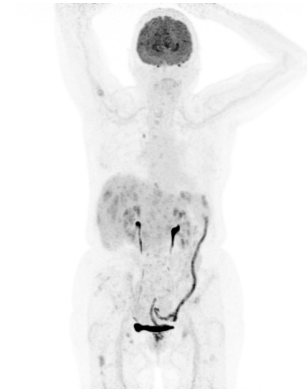


Image TEP : radiotraceur ^{18}F -FDG.

La tomographie par émission de positon (TEP) :

Utilisation d'isotopes β^+ :



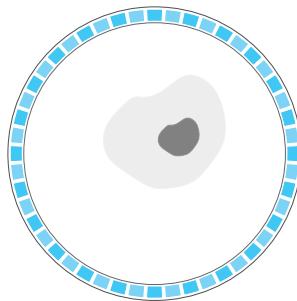
Annihilation (e^- , e^+) :

↪ émission de 2 photons γ de 511 keV en **directions opposées**;

Détection en coïncidence des 2 photons γ :

↪ tracé d'une **ligne de réponse** $\mathcal{L}$.

Propriété : l'émission est **proche** de la ligne de réponse $\mathcal{L}$.



Reconstruction tomographique TEP :

Exploiter l'ensemble des lignes de réponse $\mathcal{L}$ pour reconstruire une image 3D de la distribution du traceur.

La tomographie par émission de positon (TEP) :

Utilisation d'isotopes β^+ :



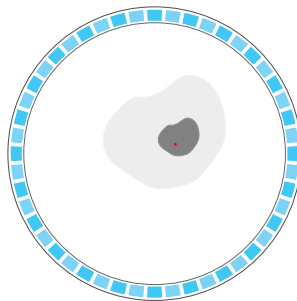
Annihilation (e^- , e^+) :

↪ émission de 2 photons γ de 511 keV en **directions opposées**;

Détection en coïncidence des 2 photons γ :

↪ tracé d'une **ligne de réponse** $\mathcal{L}$.

Propriété : l'émission est **proche** de la ligne de réponse $\mathcal{L}$.



Reconstruction tomographique TEP :

Exploiter l'ensemble des lignes de réponse $\mathcal{L}$ pour reconstruire une image 3D de la distribution du traceur.

La tomographie par émission de positon (TEP) :

Utilisation d'isotopes β^+ :



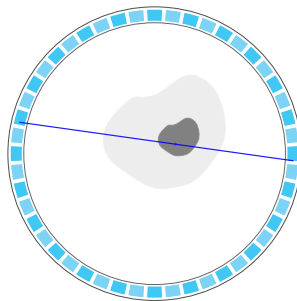
Annihilation (e^- , e^+) :

↪ émission de 2 photons γ de 511 keV en **directions opposées**;

Détection en coïncidence des 2 photons γ :

↪ tracé d'une **ligne de réponse** $\mathcal{L}$.

Propriété : l'émission est **proche** de la ligne de réponse $\mathcal{L}$.



Reconstruction tomographique TEP :

Exploiter l'ensemble des lignes de réponse $\mathcal{L}$ pour reconstruire une image 3D de la distribution du traceur.

La tomographie par émission de positon (TEP) :

Utilisation d'isotopes β^+ :



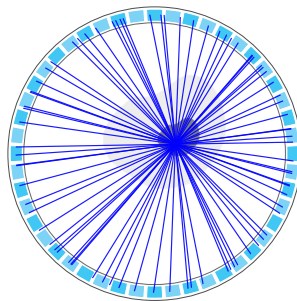
Annihilation (e^- , e^+) :

↪ émission de 2 photons γ de 511 keV en **directions opposées**;

Détection en coïncidence des 2 photons γ :

↪ tracé d'une **ligne de réponse** $\mathcal{L}$.

Propriété : l'émission est **proche** de la ligne de réponse $\mathcal{L}$.

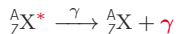


Reconstruction tomographique TEP :

Exploiter l'ensemble des lignes de réponse $\mathcal{L}$ pour reconstruire une image 3D de la distribution du traceur.

l'imagerie Compton :

Utilisation d'isotopes γ d'énergie incidente E_0 :



Contruction d'un **cône de réponse** $\mathcal{C}$

de sommet V_1 ;

d'axe $\vec{n} = \overrightarrow{V_1V_2}$;

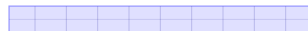
d'angle de demi-ouverture β :

$$\cos \beta = 1 - \frac{m_e c^2 E_1}{E_0(E_0 - E_1)}$$

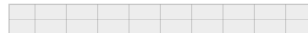
Propriété : l'émission est proche du cône de réponse $\mathcal{C}$.

Reconstruction tomographique Compton

Exploiter l'ensemble des cônes de réponse $\mathcal{C}$ pour reconstruire une image 3D de la distribution du traceur.



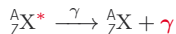
Diffuseur



Absorbeur

l'imagerie Compton :

Utilisation d'isotopes γ d'énergie incidente E_0 :



Contruction d'un **cône de réponse** $\mathcal{C}$

de sommet V_1 ;

d'axe $\vec{n} = \overrightarrow{V_1V_2}$;

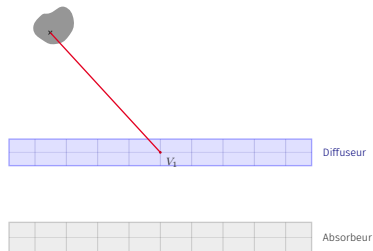
d'angle de demi-ouverture β :

$$\cos \beta = 1 - \frac{m_e c^2 E_1}{E_0(E_0 - E_1)}$$

Propriété : l'émission est proche du cône de réponse $\mathcal{C}$.

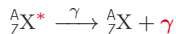
Reconstruction tomographique Compton

Exploiter l'ensemble des cônes de réponse $\mathcal{C}$ pour reconstruire une image 3D de la distribution du traceur.



l'imagerie Compton :

Utilisation d'isotopes γ d'énergie incidente E_0 :



Contruction d'un **cône de réponse** $\mathcal{C}$

de sommet V_1 ;

d'axe $\vec{n} = \overrightarrow{V_1 V_2}$;

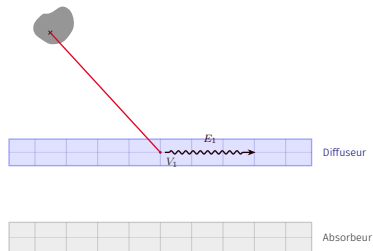
d'angle de demi-ouverture β :

$$\cos \beta = 1 - \frac{m_e c^2 E_1}{E_0 (E_0 - E_1)}$$

Propriété : l'émission est proche du cône de réponse $\mathcal{C}$.

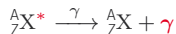
Reconstruction tomographique Compton

Exploiter l'ensemble des cônes de réponse $\mathcal{C}$ pour reconstruire une image 3D de la distribution du traceur.



l'imagerie Compton :

Utilisation d'isotopes γ d'énergie incidente E_0 :



Contruction d'un **cône de réponse** $\mathcal{C}$

de sommet V_1 ;

d'axe $\vec{n} = \overrightarrow{V_1V_2}$;

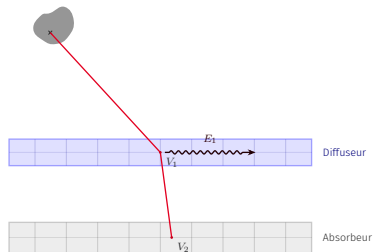
d'angle de demi-ouverture β :

$$\cos \beta = 1 - \frac{m_e c^2 E_1}{E_0(E_0 - E_1)}$$

Propriété : l'émission est proche du cône de réponse $\mathcal{C}$.

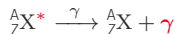
Reconstruction tomographique Compton

Exploiter l'ensemble des cônes de réponse $\mathcal{C}$ pour reconstruire une image 3D de la distribution du traceur.



l'imagerie Compton :

Utilisation d'isotopes γ d'énergie incidente E_0 :



Contruction d'un **cône de réponse** $\mathcal{C}$

de sommet V_1 ;

d'axe $\vec{n} = \overrightarrow{V_1V_2}$;

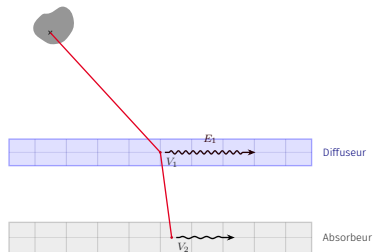
d'angle de demi-ouverture β :

$$\cos \beta = 1 - \frac{m_e c^2 E_1}{E_0(E_0 - E_1)}$$

Propriété : l'émission est proche du cône de réponse $\mathcal{C}$.

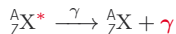
Reconstruction tomographique Compton

Exploiter l'ensemble des cônes de réponse $\mathcal{C}$ pour reconstruire une image 3D de la distribution du traceur.



l'imagerie Compton :

Utilisation d'isotopes γ d'énergie incidente E_0 :



Constrution d'un **cône de réponse** $\mathcal{C}$

de sommet V_1 ;

d'axe $\vec{n} = \overrightarrow{V_1V_2}$;

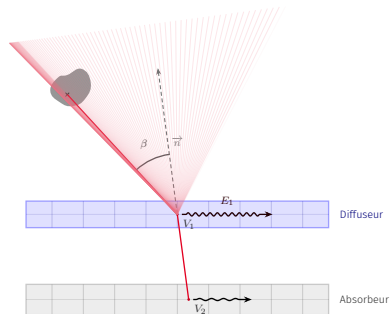
d'angle de demi-ouverture β :

$$\cos \beta = 1 - \frac{m_e c^2 E_1}{E_0(E_0 - E_1)}$$

Propriété : l'émission est proche du cône de réponse $\mathcal{C}$.

Reconstruction tomographique Compton

Exploiter l'ensemble des cônes de réponse $\mathcal{C}$ pour reconstruire une image 3D de la distribution du traceur.



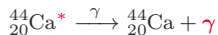
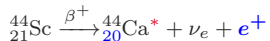
Principe :

Combiner les **deux modalités** d'imagerie TEP et Compton;

Utilisation d'isotopes (β^+ , γ)

$\rightsquigarrow$ émission d'un **positon** et d'un γ **désexcitation** en **quasi-coïncidence**.

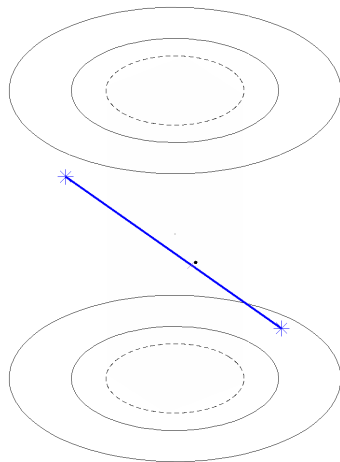
Exemple d'isotope (β^+ , γ) :



avec $E_0 = 1.157 \text{ MeV}$

Idée clé

L'origine de l'émission **proche** de l'intersection **LOR/COR**.



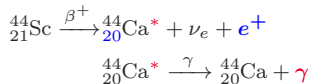
Principe :

Combiner les **deux modalités** d'imagerie TEP et Compton;

Utilisation d'isotopes (β^+ , γ)

$\rightsquigarrow$ émission d'un **positon** et d'un γ **désexcitation** en **quasi-coïncidence**.

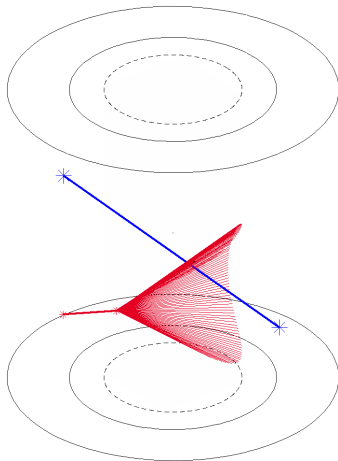
Exemple d'isotope (β^+ , γ) :



avec $E_0 = 1.157$ MeV

Idée clé

L'origine de l'émission **proche** de l'intersection **LOR/COR**.



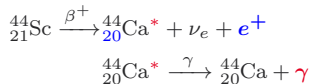
Principe :

Combiner les **deux modalités** d'imagerie TEP et Compton;

Utilisation d'isotopes (β^+ , γ)

$\rightsquigarrow$ émission d'un **positon** et d'un γ **désexcitation** en **quasi-coïncidence**.

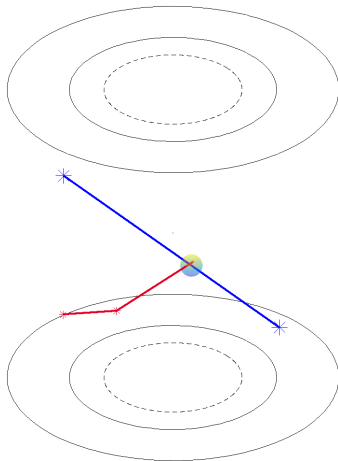
Exemple d'isotope (β^+ , γ) :



avec $E_0 = 1.157 \text{ MeV}$

Idée clé

L'origine de l'émission **proche** de l'intersection **LOR/COR**.



XEMIS2 : XEnon Medical Imaging System ¹

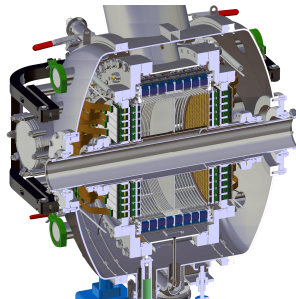
Prototype préclinique développé par l'équipe XENON du Laboratoire Subatech (Nantes).

Caractéristiques de XEMIS2 :

Dédié à l'imagerie 3γ ;

Caméra cylindrique **corps entier** pour petits animaux;

Milieu de détection **continu** au xénon liquide.



Vue de la mécanique de XEMIS2 (crédit photo : Subatech).

¹ Gallego Manzano et al., 2018

XEMIS2 : XEnon Medical Imaging System ¹

Prototype préclinique développé par l'équipe XENON du Laboratoire Subatech (Nantes).

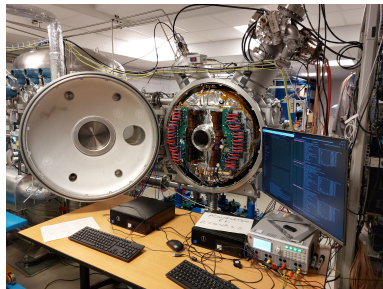
En cours d'installation au CHU de Nantes.

Caractéristiques de XEMIS2 :

Dédié à l'imagerie 3γ ;

Caméra cylindrique **corps entier** pour petits animaux;

Milieu de détection **continu** au xénon liquide.



caméra XEMIS2 (crédit photo : Subatech).

¹ Gallego Manzano et al., 2018

XEMIS2 : XEnon Medical Imaging System ¹

Prototype préclinique développé par l'équipe XENON du Laboratoire Subatech (Nantes).

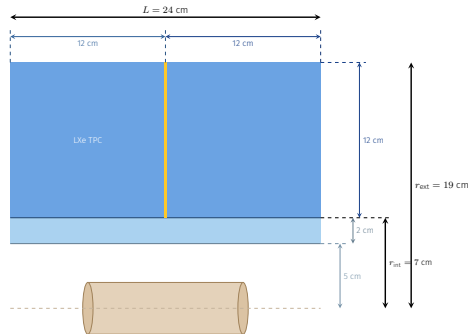
En cours d'installation au CHU de Nantes.

Caractéristiques de XEMIS2 :

Dédié à l'imagerie 3γ ;

Caméra cylindrique **corps entier** pour petits animaux;

Milieu de détection **continu** au xénon liquide.



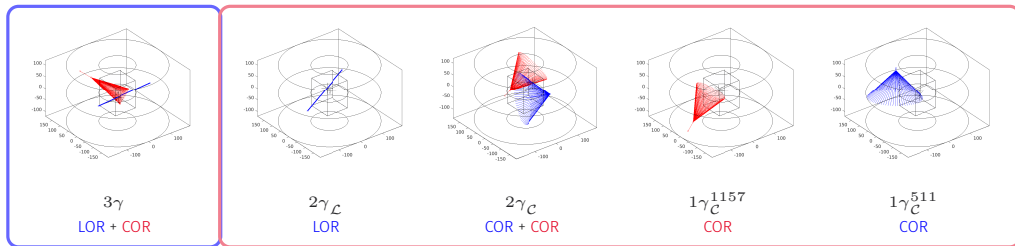
Dimensions de la caméra XEMIS2.

¹ Gallego Manzano et al., 2018

Détections avec XEMIS2 - Classes d'événements

XEMIS2 a été conçue pour l'imagerie 3γ .

Mais, il est possible de **ne pas détecter** la totalité des photons.



Classes d'événements :

1 classe de détections **complètes**;

4 classes de détections **incomplètes**.

Etat des lieux de la reconstruction avec XEMIS2 :

Beaupère et al. (2016) : reconstruction MLEM exploitant une fonction d'étalement du point;

Giovagnoli et al. (2021) : reconstruction MLEM pseudo-TOF;

Mellak et al. (2025) : reconstruction par apprentissage profond et histogrammage.

↪ Ces méthodes se **limitent à la classe 3γ** .

Observation :

Par simulation d'un fantôme **de la taille d'un rat** :

Simulateur XEMIS2 simplifié : géométrie conservée, modélisation instrumentale allégée.

≈ 20% de classe **complète** : 3γ ;

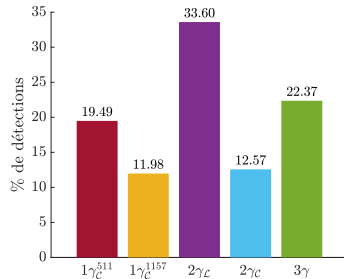
≈ 80% de classes **incomplètes** : $1\gamma_C^{1157}$, $1\gamma_C^{511}$, $2\gamma_L$, $2\gamma_C$.

Intérêt des classes incomplètes :

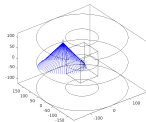
Même incomplètes, elles **contraignent géométriquement l'origine**

⇒ information exploitable.

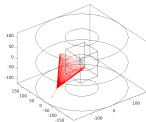
Elles représentent une **part majoritaire** des événements détectés.



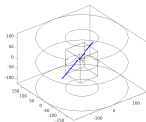
Objectifs de ces travaux de recherche :



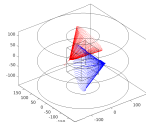
$1\gamma_C^{511}$



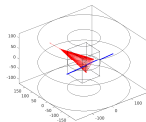
$1\gamma_C^{1157}$



$2\gamma_L$



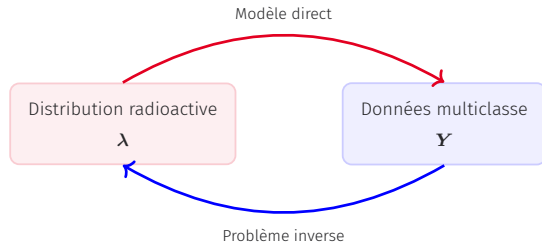
$2\gamma_C$



3γ

Question de recherche

Comment utiliser la totalité des classes d'événements $\mathbf{Y}$ détectés par XEMIS2 pour reconstruire une image de la distribution radioactive λ ?



Partie 1 : Définition du modèle direct

- Expression d'un modèle direct multiclasse

- Développement de l'opérateur de projection Compton

 - Evaluation de l'opérateur de projection Compton

 - Détection des voxels contributifs pour l'imagerie Compton

- Développement de l'opérateur de projection 3γ

Partie 2 : Résolution du problème inverse

- Algorithme de reconstruction multiclasse

- Evaluation des vecteurs de sensibilité

- Mise en œuvre dans CASToR

Conclusion et perspectives

Partie 1 : Définition du modèle direct

Expression d'un modèle direct multiclasse

Développement de l'opérateur de projection Compton

Evaluation de l'opérateur de projection Compton

Détection des voxels contributifs pour l'imagerie Compton

Développement de l'opérateur de projection 3γ

Partie 2 : Résolution du problème inverse

Algorithme de reconstruction multiclasse

Evaluation des vecteurs de sensibilité

Mise en œuvre dans CASToR

Conclusion et perspectives

Contraintes :

1. XEMIS2 mesure des **interactions** $V \in \mathbb{R}^3$ et des **dépôts d'énergies** $E \in \mathbb{R}_+$ dans un détecteur **continu**;
2. L'approche multiclasse nécessite de manipuler des événements **hétérogènes** de dimensions variables.

Format mode liste ² :

Les événements sont stockés sous forme de liste **sans discrétisation**, préservant l'**aspect continu** des mesures.

$$\mathbf{Y}^k := \left\{ \mathbf{Y}_n^k \right\}_{n=1}^{N^k} \quad \mathbf{Y}_n^k = (\text{interactions } V, \text{ énergie } E) \in \mathcal{Y}^k$$

Chaque mesure $\mathbf{Y}_n$ est **étiquetée** par une classe $k = C(\mathbf{Y}_n)$ connue *a priori* :

$$\mathbf{Y} = \bigsqcup_{k=1}^K \mathbf{Y}^k, \quad N = \sum_{k=1}^K N^k.$$

Indépendance inter-classes :

Chaque classe k est associée à un **processus d'acquisition indépendant**, les ensembles $\{\mathbf{Y}^k\}_{k=1}^K$ sont **statistiquement indépendants** conditionnellement à l'image λ .

² Barrett et al., 1997

Expression du modèle direct :

Objectif :

Relier les événements $\mathbf{Y} = \{\mathbf{Y}_n^k\}_{n,k}$ à la distribution 3D discrétisée $\boldsymbol{\lambda} = (\lambda_j)_j$.

Définition de K modèles directs :

Pour chaque classe $k \in \llbracket 1, K \rrbracket$:

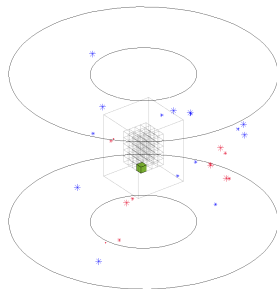
$$\mathbf{Y}_n^k \stackrel{\text{i.i.d.}}{\sim} \mathcal{P}(\bar{\mathbf{Y}}^k) \quad \forall n \in \llbracket 1, N^k \rrbracket$$

$$\text{avec } \bar{\mathbf{Y}}^k = \sum_{j=1}^J T_j^k(\mathbf{Y}^k) \lambda_j + \bar{\varepsilon}^k$$

λ_j : activité du voxel j ;

$T_j^k(\cdot)$: opérateur de projection;

$\bar{\varepsilon}^k \geq 0$: contribution de fond.



Contexte XEMIS2 :

$$\bar{\varepsilon}^k \approx 0 \quad \forall k \in \llbracket 1, K \rrbracket$$

Expression du modèle direct - l'opérateur de projection :

Relier la mesure $\mathbf{Y} \in \mathcal{Y}^k$ à l'image $\boldsymbol{\lambda} \in \mathbb{R}_+^J$ via :

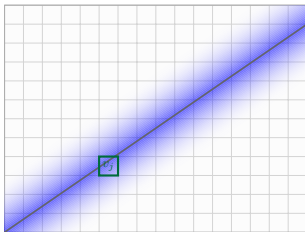
$$\bar{\mathbf{Y}}^k = \sum_{j=1}^J T_j^k(\mathbf{Y}^k) \lambda_j$$

Interprétation probabiliste :

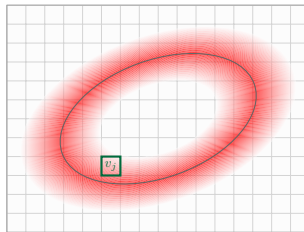
Pour une émission dans le voxel v_j :

$$T_j^k(\mathbf{Y}) = \mathbb{P}(\mathbf{Y}; \text{émission dans } v_j, \text{ classe } k), \quad \forall \mathbf{Y} \in \mathcal{Y}^k, k \in \llbracket 1, K \rrbracket$$

Classe $2\gamma_{\mathcal{L}}$



Classe $1\gamma_{\mathcal{C}}$



Partie 1 : Définition du modèle direct

Expression d'un modèle direct multiclasse

Développement de l'opérateur de projection Compton

Evaluation de l'opérateur de projection Compton

Détection des voxels contributifs pour l'imagerie Compton

Développement de l'opérateur de projection 3γ

Partie 2 : Résolution du problème inverse

Algorithme de reconstruction multiclasse

Evaluation des vecteurs de sensibilité

Mise en œuvre dans CASToR

Conclusion et perspectives

Partie 1 : Définition du modèle direct

Expression d'un modèle direct multiclasse

Développement de l'opérateur de projection Compton

Evaluation de l'opérateur de projection Compton

Détection des voxels contributifs pour l'imagerie Compton

Développement de l'opérateur de projection 3γ

Partie 2 : Résolution du problème inverse

Algorithme de reconstruction multiclasse

Evaluation des vecteurs de sensibilité

Mise en œuvre dans CASToR

Conclusion et perspectives

Opérateur de projection Compton – Définition d'un modèle

Pour un événement $\mathbf{Y} := (V_1, V_2, E_0, E_1) \rightsquigarrow \mathcal{C}(V_1, \vec{n}, \beta)$.

Expression de l'opérateur de projection Compton ^{3 4} :

Contexte XEMIS2 : l'incertitude spatiale négligeable devant l'incertitude angulaire.

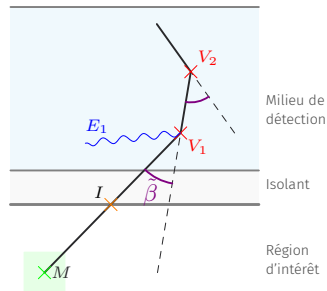
$$T_j^{1\gamma c}(\mathbf{Y}) \propto \int_{M \in v_j} \underbrace{\exp(-\mu_\tau \|\vec{IM}\|_2 - \mu_c \|\vec{V_1 I}\|_2)}_{:=a_{V_1}(M)} \times \underbrace{\frac{K(\tilde{\beta} | E_0)}{\|\vec{V_1 M}\|_2^2} h(\beta | \tilde{\beta}, \sigma(\tilde{\beta}))}_{:=g_{\tilde{\beta}}(M)} dv$$

Modèle d'incertitude angulaire sur β :

Modélisation par un étalement gaussien $h(\cdot | \tilde{\beta}, \sigma(\tilde{\beta}))$ d'écart-type :

$$\sigma(\tilde{\beta}) := \frac{m_e c^2 \sigma(\tilde{E}_1)}{\sin(\tilde{\beta}) (E_0 - \tilde{E}_1)^2}$$

où $\sigma(\tilde{E}_1)$ est obtenu par calibration de XEMIS2 ^{5 6}.



³ Maxim et al., 2016 ⁴ Bossis, 2024 ⁵ Ordóñez et al., 1997 ⁶ Gallego Manzano, 2016

Opérateur de projection Compton – Définition d'un modèle

Pour un événement $\mathbf{Y} := (V_1, V_2, E_0, E_1) \rightsquigarrow \mathcal{C}(V_1, \vec{n}, \beta)$.

Expression de l'opérateur de projection Compton ^{3 4} :

Contexte XEMIS2 : l'incertitude spatiale négligeable devant l'incertitude angulaire.

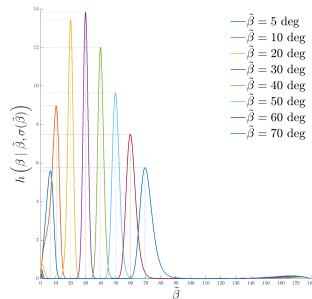
$$T_j^{1\gamma c}(\mathbf{Y}) \propto \int_{M \in v_j} \underbrace{\exp(-\mu_\tau \|\vec{IM}\|_2 - \mu_c \|\vec{V_1 I}\|_2)}_{:= a_{V_1}(M)} \times \underbrace{\frac{K(\tilde{\beta} | E_0)}{\|\vec{V_1 M}\|_2^2} h(\beta | \tilde{\beta}, \sigma(\tilde{\beta}))}_{:= g_\beta(M)} dv$$

Modèle d'incertitude angulaire sur β :

Modélisation par un étalement gaussien $h(\cdot | \tilde{\beta}, \sigma(\tilde{\beta}))$ d'écart-type :

$$\sigma(\tilde{\beta}) := \frac{m_e c^2 \sigma(\tilde{E}_1)}{\sin(\tilde{\beta}) (E_0 - \tilde{E}_1)^2}$$

où $\sigma(\tilde{E}_1)$ est obtenu par calibration de XEMIS2 ^{5 6}.



³ Maxim et al., 2016 ⁴ Bossis, 2024 ⁵ Ordóñez et al., 1997 ⁶ Gallego Manzano, 2016

Opérateur de projection Compton – Comment évaluer l'opérateur de projection ?

$$\begin{aligned} T_j^{1\gamma c}(\mathbf{Y}) &\propto \int_{M \in v_j} a_{V_1}(M) \times g_\beta(M) dv \\ &\propto a_{V_1}(C_j) \int_{M \in v_j} g_\beta(M) dv \end{aligned}$$

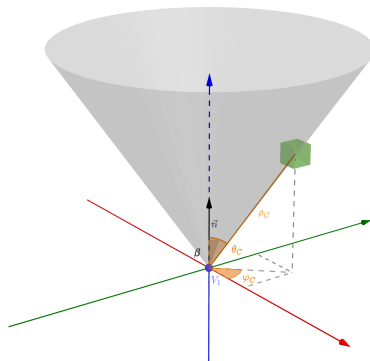
Comment évaluer cette intégrale ?

Dans un repère sphérique **aligné** sur $\mathcal{C}$:

Pas de **forme analytique simple** (en pratique) ;

Recours à des **approximations numériques**

⇒ compromis précision ↔ coût computationnel.



Opérateur de projection Compton – Évaluation cone-driven

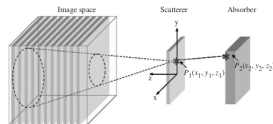
Principe : Exploiter la géométrie du cône $\mathcal{C}$ pour évaluer l'intégrale volumique.

Ellipse Stacking Method ⁷ :

Découpage en plans $z = z_f$: cône $\cap$ plan = ellipse;

Pour chaque voxel :

approximation par **interpolation bilinéaire** dans chaque plan.

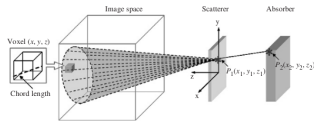


Ray Tracing Method ⁸ :

Échantillonnage par N_g génératrices le long du cône;

Pour chaque voxel :

approximation par **longueurs d'intersection** génératrices $\cap$ voxels.



Limite commune :

Méthodes conçues pour un cône **déterministe** i.e., pas d'incertitude sur β ;

Intégrer $h(\beta | \tilde{\beta}, \sigma(\tilde{\beta}))$ implique un **balayage azimutal et polaire** du cône ⁹ $\rightsquigarrow$ coût prohibitif.

⁷ Wilderman, Rogers, et al., 1998 ⁸ Kim et al., 2007 ⁹ Lojcono, 2013

Principe : Exploiter les voxels pour évaluer l'intégrale volumique.

Méthode centre-voxel SV_0 ¹⁰ :

Une évaluation **unique** de $g_\beta(\cdot)$ au centre du voxel C :

$$\hat{T}_j^{1\gamma c}(\mathbf{Y}) \approx g_\beta(C) \times \text{vol}(v_j)$$

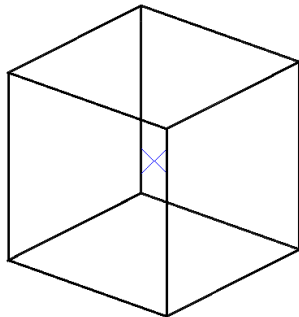
↪ Ne capture pas les variations intra-voxel de $g_\beta(\cdot)$.

Sur-voxelisation SV_N : capturer les variations intra-voxel

$(N + 1)^3$ évaluations de $g_\beta(\cdot)$ sur une grille régulière dans v_j :

$$\hat{T}_j^{1\gamma c}(\mathbf{Y}) \approx \frac{\text{vol}(v_j)}{(N + 1)^3} \sum_{n=1}^{(N+1)^3} g_\beta(C_n)$$

↪ Coût computationnel multiplié par $(N + 1)^3$.



SV_0 : 1 évaluation

¹⁰Lojacono, 2013

Principe : Exploiter les voxels pour évaluer l'intégrale volumique.

Méthode centre-voxel SV_0 ¹⁰ :

Une évaluation **unique** de $g_\beta(\cdot)$ au centre du voxel C :

$$\hat{T}_j^{1\gamma c}(\mathbf{Y}) \approx g_\beta(C) \times \text{vol}(v_j)$$

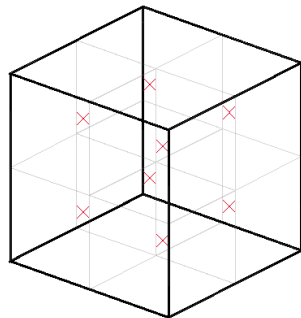
↪ Ne capture pas les variations intra-voxel de $g_\beta(\cdot)$.

Sur-voxelisation SV_N : capturer les variations intra-voxel

$(N + 1)^3$ évaluations de $g_\beta(\cdot)$ sur une grille régulière dans v_j :

$$\hat{T}_j^{1\gamma c}(\mathbf{Y}) \approx \frac{\text{vol}(v_j)}{(N + 1)^3} \sum_{n=1}^{(N+1)^3} g_\beta(C_n)$$

↪ Coût computationnel multiplié par $(N + 1)^3$.



SV_1 : 8 évaluations

¹⁰Lojacono, 2013

Principe : Exploiter les voxels pour évaluer l'intégrale volumique.

Méthode centre-voxel SV_0 ¹⁰ :

Une évaluation **unique** de $g_\beta(\cdot)$ au centre du voxel C :

$$\hat{T}_j^{1\gamma c}(\mathbf{Y}) \approx g_\beta(C) \times \text{vol}(v_j)$$

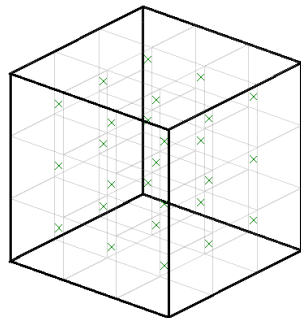
↪ Ne capture pas les variations intra-voxel de $g_\beta(\cdot)$.

Sur-voxelisation SV_N : capturer les variations intra-voxel

$(N + 1)^3$ évaluations de $g_\beta(\cdot)$ sur une grille régulière dans v_j :

$$\hat{T}_j^{1\gamma c}(\mathbf{Y}) \approx \frac{\text{vol}(v_j)}{(N + 1)^3} \sum_{n=1}^{(N+1)^3} g_\beta(C_n)$$

↪ Coût computationnel multiplié par $(N + 1)^3$.



SV₂ : 27 évaluations

¹⁰Lojacono, 2013

Principe : Exploiter les voxels pour évaluer l'intégrale volumique.

Méthode centre-voxel SV_0 ¹⁰ :

Une évaluation **unique** de $g_\beta(\cdot)$ au centre du voxel C :

$$\hat{T}_j^{1\gamma c}(\mathbf{Y}) \approx g_\beta(C) \times \text{vol}(v_j)$$

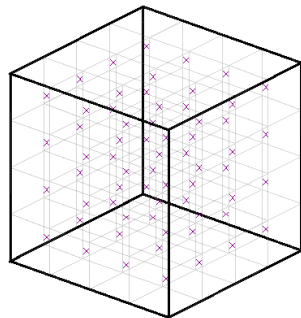
↪ Ne capture pas les variations intra-voxel de $g_\beta(\cdot)$.

Sur-voxélisation SV_N : capturer les variations intra-voxel

$(N + 1)^3$ évaluations de $g_\beta(\cdot)$ sur une grille régulière dans v_j :

$$\hat{T}_j^{1\gamma c}(\mathbf{Y}) \approx \frac{\text{vol}(v_j)}{(N + 1)^3} \sum_{n=1}^{(N+1)^3} g_\beta(C_n)$$

↪ Coût computationnel multiplié par $(N + 1)^3$.



SV_3 : 64 évaluations

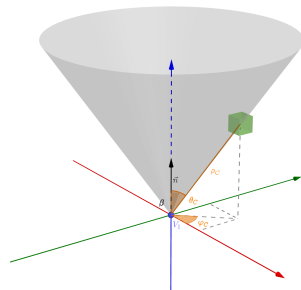
¹⁰Lojacono, 2013

$$T_j^{1\gamma c}(\mathbf{Y}) \propto \int_{M \in v_j} g_\beta(M) dv \text{ avec } g_\beta(M) = \frac{K(\tilde{\beta} | E_0)}{\|V_1 M\|_2^2} h(\beta | \tilde{\beta}, \sigma(\tilde{\beta}))$$

Passage en coordonnées sphériques :

$$T_j^{1\gamma c}(\mathbf{Y}) \propto \iiint \frac{g_\beta(\theta)}{\cancel{\rho}} \chi_{v_j}(M) \cancel{\rho} \sin(\theta) d\rho d\varphi d\theta$$

avec $g_\beta(\theta) = K(\theta | E_0) h(\beta | \theta, \sigma(\theta))$



Constats :

Séparabilité : $g_\beta(\theta)$ ne dépend que de $\theta \Rightarrow$ **factorisation** des intégrales **indépendantes** en ρ et φ ;

Verrou : $\chi_{v_j}(M)$ définit un voxel en **coordonnées cartésiennes** $\Rightarrow$ la factorisation est **bloquée**.

Proposition :

Approcher $\chi_{v_j}(M)$ par un domaine $\chi_{\check{v}_j}(M)$ dont les bornes sont **séparables** en (ρ, φ, θ) ;

Idée :

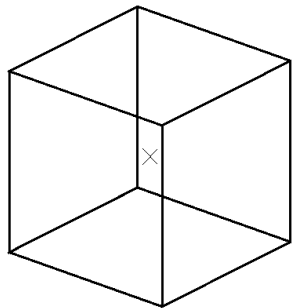
Remplacer un voxel **cubique** v_j par un voxel **déformé** $\check{v}_j$ qui épouse la géométrie de $\mathcal{C}$.

Concept de boîte sphérique :

Forme simple de région définie par des **contraintes séparables** en coordonnées sphériques.

Formulation pour un voxel déformé $\check{v}_j$:

$$B := \begin{cases} \chi_{\check{v}_j}(M) = \left[\rho_C \pm \frac{\delta\rho}{2} \right] \times \left[\varphi_C \pm \frac{\delta\varphi}{2} \right] \times \left[\theta_C \pm \frac{\delta\theta}{2} \right] \\ \text{avec } \delta\rho = d, \delta\theta = \frac{\delta\rho}{\rho_C}, \delta\varphi = \frac{\delta\rho}{\rho_C \sin(\theta_C)} \\ \text{et } \delta\theta \in]0, \pi[, \delta\varphi \in]0, \pi]. \end{cases}$$



Contraintes géométriques :

Les expressions des longueurs d'arêtes $\delta\rho, \delta\varphi, \delta\theta$ sont définies :

pour **préserver le volume** du voxel initial : $\text{vol}(\check{v}_j) = \text{vol}(v_j)$;

limiter l'impact de la déformation du voxel.

Opérateur de projection Compton – Principe de déformation des voxels

Idée :

Remplacer un voxel **cubique** v_j par un voxel **déformé** $\check{v}_j$ qui épouse la géométrie de $\mathcal{C}$.

Concept de boite sphérique :

Forme simple de région définie par des **contraintes séparables** en coordonnées sphériques.

Formulation pour un voxel déformé $\check{v}_j$:

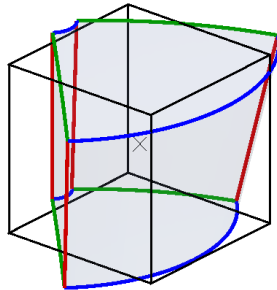
$$B := \begin{cases} \chi_{\check{v}_j}(M) = \left[\rho_C \pm \frac{\delta\rho}{2} \right] \times \left[\varphi_C \pm \frac{\delta\varphi}{2} \right] \times \left[\theta_C \pm \frac{\delta\theta}{2} \right] \\ \text{avec } \delta\rho = d, \delta\theta = \frac{\delta\rho}{\rho_C}, \delta\varphi = \frac{\delta\rho}{\rho_C \sin(\theta_C)} \\ \text{et } \delta\theta \in]0, \pi[, \delta\varphi \in]0, \pi]. \end{cases}$$

Contraintes géométriques :

Les expressions des longueurs d'arêtes $\delta\rho, \delta\varphi, \delta\theta$ sont définies :

pour **préserver le volume** du voxel initial : $\text{vol}(\check{v}_j) = \text{vol}(v_j)$;

limiter l'impact de la déformation du voxel.



Application du principe de déformation :

Substitution de $\chi_{v_j}(\cdot)$ par $\chi_{\check{v}_j}(\cdot)$ dans l'intégrale :

$$\check{T}_j^{1\gamma_C}(\mathbf{Y}) \propto \delta\rho\delta\varphi \underbrace{\int_{\theta_C - \frac{\delta\theta}{2}}^{\theta_C + \frac{\delta\theta}{2}} g_\beta(\theta) \sin(\theta) d\theta}_{:= I_\beta(\theta_C, \delta\theta)}$$

Méthode de Simpson :

Interpolation polynomiale de degré $n = 2$:

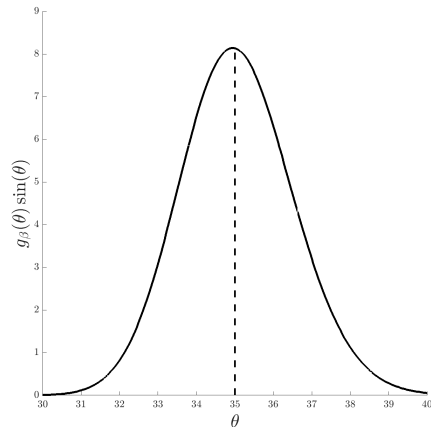
$$I_\beta(\theta_C, \delta\theta) \approx \frac{\delta\theta}{3} \left(\tilde{g}_\beta \left(\theta_C - \frac{\delta\theta}{2} \right) + 4\tilde{g}_\beta(\theta_C) + \tilde{g}_\beta \left(\theta_C + \frac{\delta\theta}{2} \right) \right)$$

$$\text{avec } \tilde{g}_\beta(\theta) := g_\beta(\theta) \sin(\theta)$$

Avantages :

Capture les variations locales de l'intégrande $\tilde{g}_\beta(\cdot)$;

Ne nécessite que 3 évaluations de $\tilde{g}_\beta(\cdot)$;



Application du principe de déformation :

Substitution de $\chi_{v_j}(\cdot)$ par $\chi_{\check{v}_j}(\cdot)$ dans l'intégrale :

$$\check{T}_j^{1\gamma c}(\mathbf{Y}) \propto \underbrace{\delta\rho\delta\varphi \int_{\theta_C - \frac{\delta\theta}{2}}^{\theta_C + \frac{\delta\theta}{2}} g_\beta(\theta) \sin(\theta) d\theta}_{:= I_\beta(\theta_C, \delta\theta)}$$

Méthode de Simpson :

Interpolation polynomiale de degré $n = 2$:

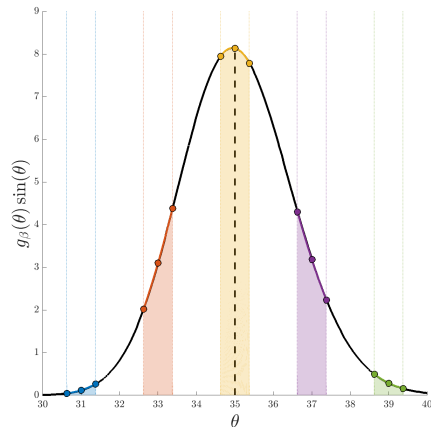
$$I_\beta(\theta_C, \delta\theta) \approx \frac{\delta\theta}{3} \left(\tilde{g}_\beta \left(\theta_C - \frac{\delta\theta}{2} \right) + 4\tilde{g}_\beta(\theta_C) + \tilde{g}_\beta \left(\theta_C + \frac{\delta\theta}{2} \right) \right)$$

$$\text{avec } \tilde{g}_\beta(\theta) := g_\beta(\theta) \sin(\theta)$$

Avantages :

Capture les variations locales de l'intégrande $\tilde{g}_\beta(\cdot)$;

Ne nécessite que 3 évaluations de $\tilde{g}_\beta(\cdot)$;



Opérateur de projection Compton – Comparaisons numériques

Approximation de l'opérateur $T^{1\gamma_C}(\cdot)$

Méthodes comparées :

SV_0 : centre-voxel;

SV_1, SV_2, SV_3 : sur-voxelisation;

DF : déformation géométrique.

Protocole :

Paramètres variés :

Angle Compton : $\beta \in \{25, 35, 45\}$ deg;

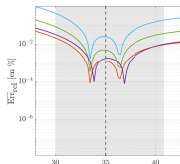
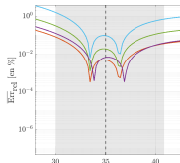
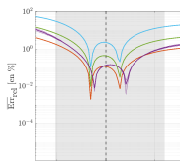
Distance : $\rho \in \{25, 125, 250\}$ mm;

Taille voxel : $d \in \{0.5, 1, 4\}$ mm.

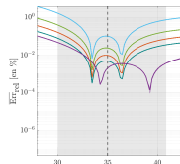
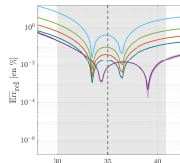
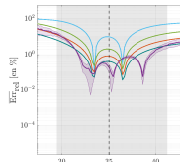
Métrique : Erreur relative (%)

Référence : T^∞ (asymptote);

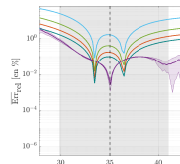
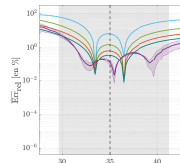
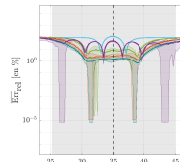
Méthode : $SV_{\max} \rightsquigarrow d_{\min} = 0.125$ mm.



$d = 0.5$ mm



$d = 1$ mm



$d = 4$ mm

$\rho = 25$ mm

$\rho = 125$ mm

$\rho = 250$ mm

Opérateur de projection Compton – Comparaisons numériques

Approximation de l'opérateur $T^{1\gamma_C}(\cdot)$

$\beta = 35 \text{ deg}$, $\rho = 125 \text{ mm}$, $d = 1 \text{ mm}$

SV_0 , SV_1 , SV_2 , SV_3 , DF .

Méthodes comparées :

SV_0 : centre-voxel;

SV_1 , SV_2 , SV_3 : sur-voxelisation;

DF : déformation géométrique.

Protocole :

Paramètres variés :

Angle Compton : $\beta \in \{25, \mathbf{35}, 45\} \text{ deg}$;

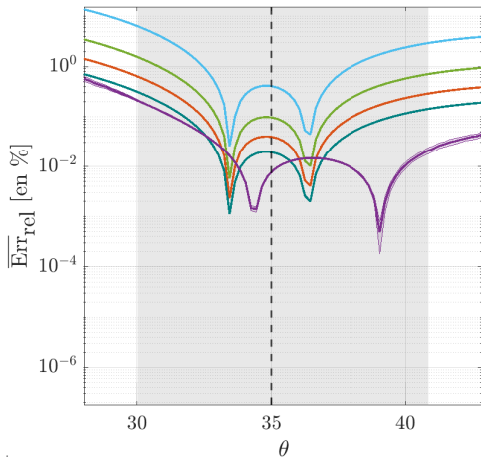
Distance : $\rho \in \{25, 125, 250\} \text{ mm}$;

Taille voxel : $d \in \{0.5, 1, 4\} \text{ mm}$.

Métrique : Erreur relative (%)

Référence : T^∞ (asymptote);

Méthode : $SV_{\max} \rightsquigarrow d_{\min} = 0.125 \text{ mm}$.



Partie 1 : Définition du modèle direct

Expression d'un modèle direct multiclasse

Développement de l'opérateur de projection Compton

Evaluation de l'opérateur de projection Compton

Détection des voxels contributifs pour l'imagerie Compton

Développement de l'opérateur de projection 3γ

Partie 2 : Résolution du problème inverse

Algorithme de reconstruction multiclasse

Evaluation des vecteurs de sensibilité

Mise en œuvre dans CASToR

Conclusion et perspectives

Observation :

Pour un angle **mesuré** β , la fonction $g_\beta(\tilde{\beta})$ est **concentrée** autour de β .

Objectif :

Restreindre l'intégration aux voxels dont l'angle **géométrique** $\tilde{\beta}$ est *proche* de β

Définition de la coquille conique $\mathcal{S}$ par troncature de $g_\beta(\cdot)$:

1. Fixer un seuil $\tau > 0$ et définir un intervalle d'angles $\tilde{\beta}$:

$$\Psi(\beta, \tau) := \{ \tilde{\beta} \in [0, \pi] : g_\beta(\tilde{\beta}) \geq \tau \}$$

2. Construire la coquille conique associée :

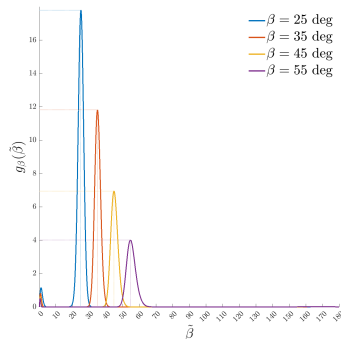
$$\mathcal{S}(V_1, \vec{n}, \beta) := \bigcup_{\tilde{\beta} \in \Psi(\beta, \tau)} \mathcal{C}(V_1, \vec{n}, \tilde{\beta})$$

Screening analytique :

Tester l'intersection d'un voxel v_j avec $\mathcal{S}$:

Si $v_j \cap \mathcal{S}(V_1, \vec{n}, \beta) = \emptyset$ alors v_j est **rejeté**;

→ évaluation de l'opérateur $T^{1\gamma_C}(\cdot)$ **seulement** sur les voxels non rejetés.



Observation :

Pour un angle **mesuré** β , la fonction $g_\beta(\tilde{\beta})$ est **concentrée** autour de β .

Objectif :

Restreindre l'intégration aux voxels dont l'angle **géométrique** $\tilde{\beta}$ est *proche* de β

Définition de la coquille conique $\mathcal{S}$ par troncature de $g_\beta(\cdot)$:

1. Fixer un seuil $\tau > 0$ et définir un intervalle d'angles $\tilde{\beta}$:

$$\Psi(\beta, \tau) := \{ \tilde{\beta} \in [0, \pi] : g_\beta(\tilde{\beta}) \geq \tau \}$$

2. Construire la coquille conique associée :

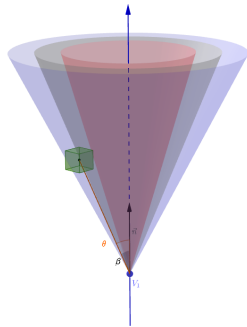
$$\mathcal{S}(V_1, \vec{n}, \beta) := \bigcup_{\tilde{\beta} \in \Psi(\beta, \tau)} \mathcal{C}(V_1, \vec{n}, \tilde{\beta})$$

Screening analytique :

Tester l'intersection d'un voxel v_j avec $\mathcal{S}$:

Si $v_j \cap \mathcal{S}(V_1, \vec{n}, \beta) = \emptyset$ alors v_j est **rejeté**;

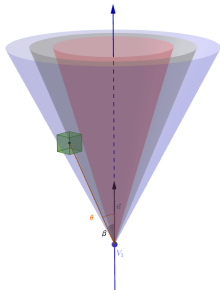
↪ évaluation de l'opérateur $T^{1\gamma c}(\cdot)$ **seulement** sur les voxels non rejetés.



Algorithme de screening – Test d'intersection voxel/coquille

Comment vérifier si un voxel v_j de centre C **intersecte** la coquille conique $\mathcal{S}(V_1, \vec{n}, \beta)$?

Définition d'une condition suffisante :



Simplification efficace :

Déduction de règles d'exclusion de voxels **uniquement** basées sur leurs centres C .

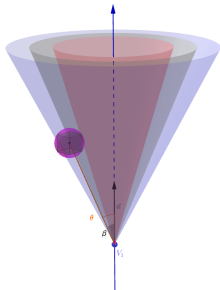
Limite :

Ces tests ne s'appliquent qu'à **un voxel à la fois** ...

Algorithme de screening – Test d'intersection voxel/coquille

Comment vérifier si un voxel v_j de centre C **intersecte** la coquille conique $\mathcal{S}(V_1, \vec{n}, \beta)$?

Définition d'une condition suffisante :



Simplification efficace :

Déduction de règles d'exclusion de voxels **uniquement** basées sur leurs centres C .

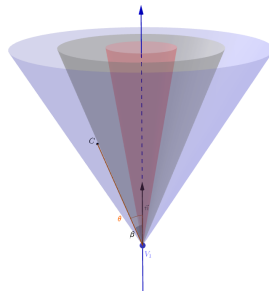
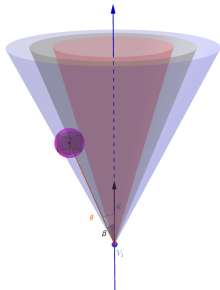
Limite :

Ces tests ne s'appliquent qu'à **un voxel à la fois** ...

Algorithme de screening – Test d'intersection voxel/coquille

Comment vérifier si un voxel v_j de centre C **intersecte** la coquille conique $\mathcal{S}(V_1, \vec{n}, \beta)$?

Définition d'une condition suffisante :



Simplification efficace :

Déduction de règles d'exclusion de voxels **uniquement** basées sur leurs centres C .

Limite :

Ces tests ne s'appliquent qu'à **un voxel à la fois** ...

Algorithme de screening – Généralisation aux plans de voxels.

Idée clé :

Exploiter l'image discrétisée comme une **grille cartésienne** pour **rejeter en bloc** des voxels non contributifs.

Principe :

Pour chaque plan $z = z_f$, les centres sont **coplanaires** et **colinéaires**.

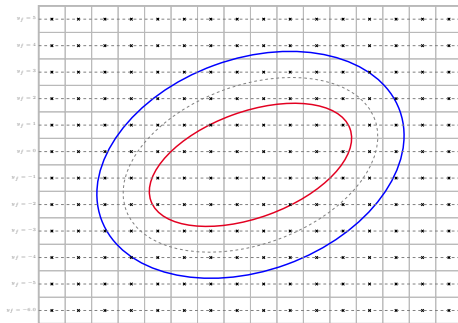
1. Balayage plan par plan $\mathcal{P}_{z_f}$;
2. Pour chaque $\mathcal{P}_{z_f}$, balayage des **segments de centres** à $y = y_f$:

$$\{C(x, y_f, z_f) : x \in \mathbb{R}\} + \text{condition suffisante}$$

3. Calcul de l'intersection $\mathcal{S} \cap C(x, y_f, z_f)$:
→ 2 équations du 2nd degré donnant des **bornes analytiques** :

$$x \in [x_{\text{ext/int}}^-, x_{\text{ext/int}}^+] \text{ ou } \emptyset;$$

Rejet direct de tous les voxels d'un segment dont le centre C est **hors des bornes analytiques** !



Raffinements possibles :

Exclusion **direct** de plan $\mathcal{P}_{z_f}$;

réduction à une région d'intérêt $\mathcal{R}_{z_f} \subset \mathcal{P}_{z_f}$.

Algorithme de screening – Généralisation aux plans de voxels.

Idée clé :

Exploiter l'image discrétisée comme une **grille cartésienne** pour **rejeter en bloc** des voxels non contributifs.

Principe :

Pour chaque plan $z = z_f$, les centres sont **coplanaires** et **colinéaires**.

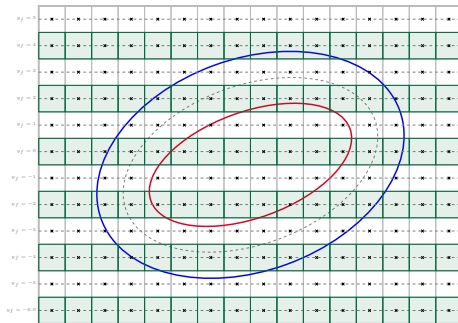
1. Balayage plan par plan $\mathcal{P}_{z_f}$;
2. Pour chaque $\mathcal{P}_{z_f}$, balayage des **segments de centres** à $y = y_f$:

$$\{C(x, y_f, z_f) : x \in \mathbb{R}\} + \text{condition suffisante}$$

3. Calcul de l'intersection $\mathcal{S} \cap C(x, y_f, z_f)$:
→ 2 équations du 2nd degré donnant des **bornes analytiques** :

$$x \in [x_{\text{ext/int}}^-, x_{\text{ext/int}}^+] \text{ ou } \emptyset;$$

Rejet direct de tous les voxels d'un segment dont le centre C est **hors des bornes analytiques** !



Raffinements possibles :

Exclusion **direct** de plan $\mathcal{P}_{z_f}$;

réduction à une région d'intérêt $\mathcal{R}_{z_f} \subset \mathcal{P}_{z_f}$.

Algorithme de screening – Généralisation aux plans de voxels.

Idée clé :

Exploiter l'image discrétisée comme une **grille cartésienne** pour **rejeter en bloc** des voxels non contributifs.

Principe :

Pour chaque plan $z = z_f$, les centres sont **coplanaires** et **colinéaires**.

1. Balayage plan par plan $\mathcal{P}_{z_f}$;
2. Pour chaque $\mathcal{P}_{z_f}$, balayage des **segments de centres** à $y = y_f$:

$$\{C(x, y_f, z_f) : x \in \mathbb{R}\} + \text{condition suffisante}$$

3. Calcul de l'intersection $\mathcal{S} \cap C(x, y_f, z_f)$:
→ 2 équations du 2nd degré donnant des **bornes analytiques** :

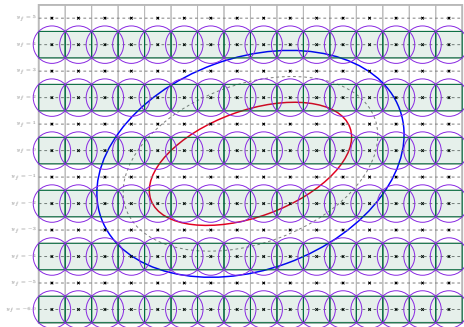
$$x \in [x_{\text{ext/int}}^-, x_{\text{ext/int}}^+] \text{ ou } \emptyset;$$

Rejet direct de tous les voxels d'un segment dont le centre C est **hors des bornes analytiques** !

Raffinements possibles :

Exclusion direct de plan $\mathcal{P}_{z_f}$;

réduction à une région d'intérêt $\mathcal{R}_{z_f} \subset \mathcal{P}_{z_f}$.



Algorithme de screening – Généralisation aux plans de voxels.

Idée clé :

Exploiter l'image discrétisée comme une **grille cartésienne** pour **rejeter en bloc** des voxels non contributifs.

Principe :

Pour chaque plan $z = z_f$, les centres sont **coplanaires** et **colinéaires**.

1. Balayage plan par plan $\mathcal{P}_{z_f}$;
2. Pour chaque $\mathcal{P}_{z_f}$, balayage des **segments de centres** à $y = y_f$:

$$\{C(x, y_f, z_f) : x \in \mathbb{R}\} + \text{condition suffisante}$$

3. Calcul de l'intersection $\mathcal{S} \cap C(x, y_f, z_f)$:
→ 2 équations du 2nd degré donnant des **bornes analytiques** :

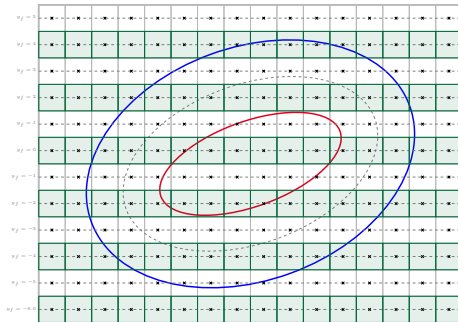
$$x \in [x_{\text{ext/int}}^-, x_{\text{ext/int}}^+] \text{ ou } \emptyset;$$

Rejet direct de tous les voxels d'un segment dont le centre C est **hors des bornes analytiques** !

Raffinements possibles :

Exclusion direct de plan $\mathcal{P}_{z_f}$;

réduction à une région d'intérêt $\mathcal{R}_{z_f} \subset \mathcal{P}_{z_f}$.



Algorithme de screening – Généralisation aux plans de voxels.

Idée clé :

Exploiter l'image discrétisée comme une **grille cartésienne** pour **rejeter en bloc** des voxels non contributifs.

Principe :

Pour chaque plan $z = z_f$, les centres sont **coplanaires** et **colinéaires**.

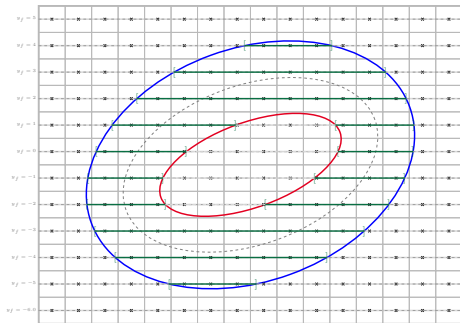
1. Balayage plan par plan $\mathcal{P}_{z_f}$;
2. Pour chaque $\mathcal{P}_{z_f}$, balayage des **segments de centres** à $y = y_f$:

$$\{C(x, y_f, z_f) : x \in \mathbb{R}\} + \text{condition suffisante}$$

3. Calcul de l'intersection $\mathcal{S} \cap C(x, y_f, z_f)$:
↪ 2 équations du 2nd degré donnant des **bornes analytiques** :

$$x \in [x_{\text{ext/int}}^-, x_{\text{ext/int}}^+] \text{ ou } \emptyset;$$

Rejet direct de tous les voxels d'un segment dont le centre C est **hors des bornes analytiques** !



Raffinements possibles :

Exclusion **direct** de plan $\mathcal{P}_{z_f}$;

réduction à une région d'intérêt $\mathcal{R}_{z_f} \subset \mathcal{P}_{z_f}$.

Algorithme de screening – Généralisation aux plans de voxels.

Idée clé :

Exploiter l'image discrétisée comme une **grille cartésienne** pour **rejeter en bloc** des voxels non contributifs.

Principe :

Pour chaque plan $z = z_f$, les centres sont **coplanaires** et **colinéaires**.

1. Balayage plan par plan $\mathcal{P}_{z_f}$;
2. Pour chaque $\mathcal{P}_{z_f}$, balayage des **segments de centres** à $y = y_f$:

$$\{C(x, y_f, z_f) : x \in \mathbb{R}\} + \text{condition suffisante}$$

3. Calcul de l'intersection $\mathcal{S} \cap C(x, y_f, z_f)$:
→ 2 équations du 2nd degré donnant des **bornes analytiques** :

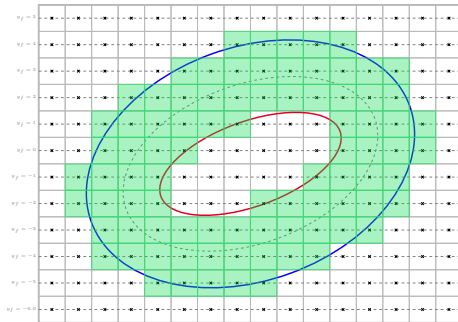
$$x \in [x_{\text{ext/int}}^-, x_{\text{ext/int}}^+] \text{ ou } \emptyset;$$

Rejet direct de tous les voxels d'un segment dont le centre C est **hors des bornes analytiques** !

Raffinements possibles :

Exclusion direct de plan $\mathcal{P}_{z_f}$;

réduction à une région d'intérêt $\mathcal{R}_{z_f} \subset \mathcal{P}_{z_f}$.



Algorithme de screening – Généralisation aux plans de voxels.

Idée clé :

Exploiter l'image discrétisée comme une **grille cartésienne** pour **rejeter en bloc** des voxels non contributifs.

Principe :

Pour chaque plan $z = z_f$, les centres sont **coplanaires** et **colinéaires**.

1. Balayage plan par plan $\mathcal{P}_{z_f}$;
2. Pour chaque $\mathcal{P}_{z_f}$, balayage des **segments de centres** à $y = y_f$:

$$\{C(x, y_f, z_f) : x \in \mathbb{R}\} + \text{condition suffisante}$$

3. Calcul de l'intersection $\mathcal{S} \cap C(x, y_f, z_f)$:
→ 2 équations du 2nd degré donnant des **bornes analytiques** :

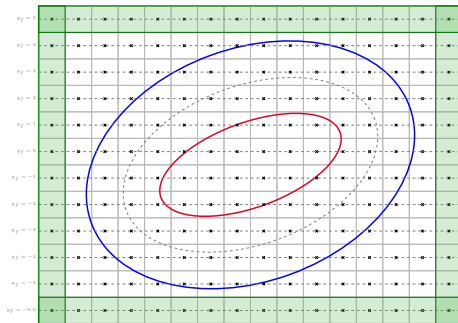
$$x \in [x_{\text{ext/int}}^-, x_{\text{ext/int}}^+] \text{ ou } \emptyset;$$

Rejet direct de tous les voxels d'un segment dont le centre C est **hors des bornes analytiques** !

Raffinements possibles :

Exclusion **direct** de plan $\mathcal{P}_{z_f}$;

réduction à une région d'intérêt $\mathcal{R}_{z_f} \subset \mathcal{P}_{z_f}$.



Comment choisir le seuil de troncature τ ?

Absolu :

valeur minimale de la fonction $g_{\beta}(\tilde{\beta})$;
dépendante des contraintes physiques ou d'instrumentation.

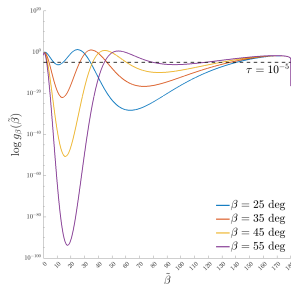
Relatif :

valeur déterminée en pourcentage de $\max g_{\beta}(\tilde{\beta})$;
indépendante de l'échelle de $g_{\beta}(\tilde{\beta})$.

Evaluations préliminaires :

Simulation d'un fantôme de la taille d'un rat;

Moyenne sur 5×10^4 événements ^{1157}C avec voxels de 1 mm^3 .



	No screening	$\tau_{\text{abs}} 1.e-5$	$\tau_{\text{rel}} 5 \%$	$\tau_{\text{rel}} 10 \%$	$\tau_{\text{rel}} 20 \%$	$\tau_{\text{rel}} 50 \%$
Réduction du nb voxel	1	1,28	2,21	2,46	2,87	4,12
Accél. temps de calcul	1	1,22	2,09	2,31	2,7	3,84

↪ Le choix **optimal** du seuil de troncature τ dépendra de la qualité des images reconstruites.

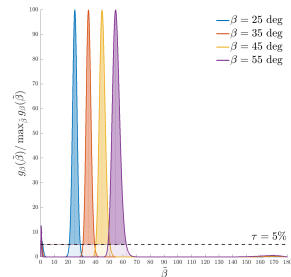
Comment choisir le seuil de troncature τ ?

Absolu :

valeur minimale de la fonction $g_{\beta}(\tilde{\beta})$;
dépendante des contraintes physiques ou d'instrumentation.

Relatif :

valeur déterminée en pourcentage de $\max g_{\beta}(\tilde{\beta})$;
indépendante de l'échelle de $g_{\beta}(\tilde{\beta})$.



Evaluations préliminaires :

Simulation d'un fantôme de la taille d'un rat;

Moyenne sur 5×10^4 événements $1\gamma_C^{1157}$ avec voxels de 1 mm^3 .

	No screening	$\tau_{\text{abs}} 1.e-5$	$\tau_{\text{rel}} 5 \%$	$\tau_{\text{rel}} 10 \%$	$\tau_{\text{rel}} 20 \%$	$\tau_{\text{rel}} 50 \%$
Réduction du nb voxel	1	1,28	2,21	2,46	2,87	4,12
Accél. temps de calcul	1	1,22	2,09	2,31	2,7	3,84

↪ Le choix **optimal** du seuil de troncature τ dépendra de la qualité des images reconstruites.

Partie 1 : Définition du modèle direct

Expression d'un modèle direct multiclasse

Développement de l'opérateur de projection Compton

Evaluation de l'opérateur de projection Compton

Détection des voxels contributifs pour l'imagerie Compton

Développement de l'opérateur de projection 3γ

Partie 2 : Résolution du problème inverse

Algorithme de reconstruction multiclasse

Evaluation des vecteurs de sensibilité

Mise en œuvre dans CASToR

Conclusion et perspectives

Principe général en deux temps :

Étape 1 : Calcul de l’intersection géométrique $\mathcal{L} \cap \mathcal{C}$;

$$\frac{\overrightarrow{V_1 M(t)} \cdot \vec{n}}{\|\overrightarrow{V_1 M(t)}\|_2} = \cos(\beta), \quad M(t) \in \mathcal{L}.$$

Etape 2 : Floutage du point d’intersection $M(t^*)$:

Prise en compte de la **fonction de réponse** asymétrique du détecteur ^{11 12};

Méthode **pseudo-TOF** : gaussienne symétrique ¹³.

Limitations

Ces méthodes supposent l’**existence** d’une intersection $\mathcal{L} \cap \mathcal{C}$;

En pratique : $\{0, 1, 2\}$ intersections possibles.

Résultats de simulation

Simulation d’un fantôme de la taille d’un rat et 5×10^5 événements 3γ :

$\text{Card}((\mathcal{L} \cap \mathcal{C}) \in \mathcal{V})$	0	1	2
Fréquence	$\approx 26\%$	$\approx 67\%$	$\approx 7\%$

¹¹ Mohammadi et al., 2022 ¹² Mellak et al., 2025 ¹³ Giovagnoli et al., 2021

Définition d'un opérateur de projection pour l'imagerie 3γ - Proposition

Rappel :

$$T_j^{3\gamma}(\mathbf{Y}) = \mathbb{P}(\mathbf{Y}; \text{émission dans } v_j, \mathbf{Y} \in \mathcal{Y}^{3\gamma}) \text{ avec } \mathbf{Y} := (\mathbf{Y}^{2\gamma_{\mathcal{L}}}, \mathbf{Y}^{1\gamma_c^{1157}})$$

Proposition : expression probabiliste de l'opérateur de projection

$$T_j^{3\gamma}(\mathbf{Y}) \propto T_j^{2\gamma_{\mathcal{L}}}(\mathbf{Y}) \times T_j^{1\gamma_c^{1157}}(\mathbf{Y})$$

Mise en pratique :

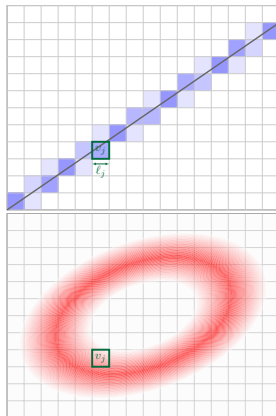
$$T_j^{3\gamma}(\mathbf{Y}) \propto \ell_j(\mathbf{Y}) \times T_j^{1\gamma_c^{1157}}(\mathbf{Y}).$$

Etape 1 : Application de l'algorithme de Siddon ¹⁴ pour obtenir :

La liste des voxels intersectés par la LOR $\mathcal{L}$: $\mathcal{J}_{\mathcal{L}}(\mathbf{Y}) = \{j : v_j \cap \mathcal{L} \neq \emptyset\}$.

Les poids $\ell_j(\mathbf{Y})$ liés aux longueurs d'intersection.

Etape 2 : Pondération Compton avec $T_j^{1\gamma_c^{1157}}(\mathbf{Y})$.



¹⁴Siddon, 1985

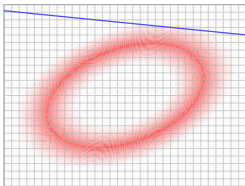
$$T_j^{3\gamma}(\mathbf{Y}) \propto \ell_j(\mathbf{Y}) T_j^{1\gamma c^{1157}}(\mathbf{Y})$$

Propriétés de la formulation proposée :

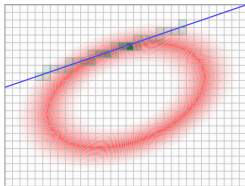
Pondération continue : produit de deux facteurs *indépendants* et *continus*;

Annulation naturelle : $\ell_j(\mathbf{Y}) = 0 \Rightarrow T_j^{3\gamma}(\mathbf{Y}) = 0 \forall j \in \mathcal{J}_{\mathcal{L}}(\mathbf{Y})$, sans seuil ni décision binaire;

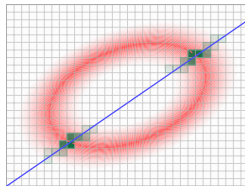
Cas unifié : aucune distinction sur $\text{Card}(\mathcal{L} \cap \mathcal{C}) \in \{0, 1, 2\}$.



$\text{Card}(\mathcal{L} \cap \mathcal{C}) = 0$



$\text{Card}(\mathcal{L} \cap \mathcal{C}) = 1$



$\text{Card}(\mathcal{L} \cap \mathcal{C}) = 2$

Partie 1 : Définition du modèle direct

Expression d'un modèle direct multiclasse

Développement de l'opérateur de projection Compton

Evaluation de l'opérateur de projection Compton

Détection des voxels contributifs pour l'imagerie Compton

Développement de l'opérateur de projection 3γ

Partie 2 : Résolution du problème inverse

Algorithme de reconstruction multiclasse

Evaluation des vecteurs de sensibilité

Mise en œuvre dans CASToR

Conclusion et perspectives

Choix de la méthode :

Optimisation de la **vraisemblance** par algorithme itératif de type **EM** ¹⁵;

Régularisation empirique par troncature des itérations (*early stopping*).

Multi-class LM-MLEM :

Extension de l'algorithme LM-MLEM proposé en TEP ¹⁶ et en Compton ¹⁷ au cas multiclasse :

K processus de Poisson indépendants : $N_k \sim \mathcal{P}(D\mu(\mathcal{Y}^k))$;

l'appartenance $\mathbf{Y}_n \in \mathcal{Y}^k$ connue : $T_j(\mathbf{Y}_n) := T_j^k(\mathbf{Y}_n) \forall n \in \llbracket 1, N \rrbracket$

Schéma itératif :

$$\begin{cases} \hat{\lambda}^{(0)} &= \hat{\lambda}_j^{(0)} > 0 \\ \hat{\lambda}_j^{(t+1)} &:= \hat{\lambda}_j^{(t)} \times \left(\frac{1}{\sum_{k=1}^K s_j^k} \right) \times \left(\sum_{n=1}^N \frac{T_j(\mathbf{Y}_n)}{\sum_{j'=1}^J \hat{\lambda}_{j'}^{(t)} T_{j'}(\mathbf{Y}_n)} \right) \end{cases} \quad \forall j \in \llbracket 1, J \rrbracket.$$

$\Rightarrow$ Chaque événement $\mathbf{Y}_n$ contribue via son propre opérateur de projection $T_j^k(\cdot)$;

¹⁵ Dempster et al., 1977

¹⁶ Parra et al., 1998

¹⁷ Wilderman, Clinthorne, et al., 1998

Partie 1 : Définition du modèle direct

Expression d'un modèle direct multiclasse

Développement de l'opérateur de projection Compton

Evaluation de l'opérateur de projection Compton

Détection des voxels contributifs pour l'imagerie Compton

Développement de l'opérateur de projection 3γ

Partie 2 : Résolution du problème inverse

Algorithme de reconstruction multiclasse

Evaluation des vecteurs de sensibilité

Mise en œuvre dans CASToR

Conclusion et perspectives

Définition de la sensibilité :

Interprétation probabiliste :

Pour une émission dans le voxel v_j :

$$s_j^k = \mathbb{P}(\text{événement de classe } k \text{ détecté} \mid \text{émission dans } v_j)$$

Sensibilité de la classe k :

La sensibilité est la réponse **globale** de la caméra pour une émission dans un voxel j de classe k .

$$s_j^k := \int_{\mathbf{Y} \in \mathcal{Y}^k} T_j^k(\mathbf{Y}) d\mathbf{Y}.$$

Évaluation de s_j^k :

Problème : s_j^k est difficile à évaluer analytiquement ...

Solution : évaluation numérique par simulation Monte-Carlo.

Estimation Monte-Carlo des vecteurs de sensibilité :

Idée :

Pour chaque voxel j , estimer **empiriquement** $\hat{s}_j^k$ pour chaque classe k .

Principe :

Simuler de nombreuses émissions 3γ uniformes dans $\mathcal{V}$;

pour chaque émission : *quelle classe k est détectée et dans quel voxel j ?*

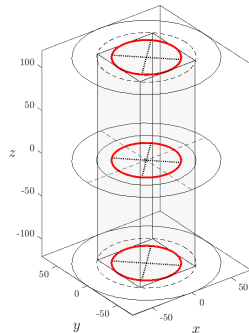
$$\hat{s}_j^k = \frac{N_j^k}{E_j} \quad \text{où} \quad \begin{cases} N_j^k : \text{détectations classe } k \text{ dans le voxel } j; \\ E_j : \text{émissions totales dans voxel } j. \end{cases}$$

Mise en pratique :

1. Restriction à un champ de vue utile $\mathcal{V}' \subset \mathcal{V}$;
2. simulation de $n \approx 10^{11}$ émissions 3γ uniformes $\mathcal{U}(\frac{1}{8}\mathcal{V}')$;
3. propagation par symétries (révolution + réflexion);
4. discrétisation de $\mathcal{V}'$ en voxels.

Champ de vue utile $\mathcal{V}' \subset \mathcal{V}$

$R = 35 \text{ mm}$, $H = 240 \text{ mm}$



Estimation Monte-Carlo des vecteurs de sensibilité :

Idée :

Pour chaque voxel j , estimer **empiriquement** $\hat{s}_j^k$ pour chaque classe k .

Principe :

Simuler de nombreuses émissions 3γ uniformes dans $\mathcal{V}$;

pour chaque émission : *quelle classe k est détectée et dans quel voxel j ?*

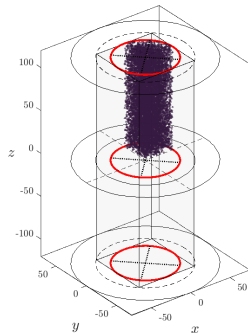
$$\hat{s}_j^k = \frac{N_j^k}{E_j} \quad \text{où} \quad \begin{cases} N_j^k : \text{détectations classe } k \text{ dans le voxel } j; \\ E_j : \text{émissions totales dans voxel } j. \end{cases}$$

Mise en pratique :

1. Restriction à un champ de vue utile $\mathcal{V}' \subset \mathcal{V}$;
2. simulation de $n \approx 10^{11}$ émissions 3γ uniformes $\mathcal{U}(\frac{1}{8}\mathcal{V}')$;
3. propagation par symétries (révolution + réflexion);
4. discrétisation de $\mathcal{V}'$ en voxels.

Champ de vue utile $\mathcal{V}' \subset \mathcal{V}$

$R = 35 \text{ mm}$, $H = 240 \text{ mm}$



Estimation Monte-Carlo des vecteurs de sensibilité :

Idée :

Pour chaque voxel j , estimer **empiriquement** $\hat{s}_j^k$ pour chaque classe k .

Principe :

Simuler de nombreuses émissions 3γ uniformes dans $\mathcal{V}$;

pour chaque émission : *quelle classe k est détectée et dans quel voxel j ?*

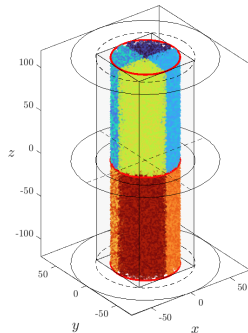
$$\hat{s}_j^k = \frac{N_j^k}{E_j} \quad \text{où} \quad \begin{cases} N_j^k : \text{détectations classe } k \text{ dans le voxel } j; \\ E_j : \text{émissions totales dans voxel } j. \end{cases}$$

Mise en pratique :

1. Restriction à un champ de vue utile $\mathcal{V}' \subset \mathcal{V}$;
2. simulation de $n \approx 10^{11}$ émissions 3γ uniformes $\mathcal{U}(\frac{1}{8}\mathcal{V}')$;
3. propagation par symétries (révolution + réflexion);
4. discrétisation de $\mathcal{V}'$ en voxels.

Champ de vue utile $\mathcal{V}' \subset \mathcal{V}$

$R = 35 \text{ mm}$, $H = 240 \text{ mm}$



Estimation Monte-Carlo des vecteurs de sensibilité :

Idée :

Pour chaque voxel j , estimer **empiriquement** $\hat{s}_j^k$ pour chaque classe k .

Principe :

Simuler de nombreuses émissions 3γ uniformes dans $\mathcal{V}$;

pour chaque émission : *quelle classe k est détectée et dans quel voxel j ?*

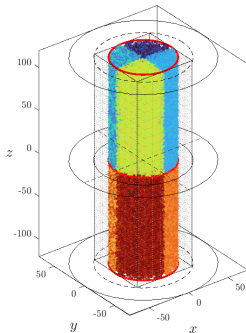
$$\hat{s}_j^k = \frac{N_j^k}{E_j} \quad \text{où} \quad \begin{cases} N_j^k : \text{détectations classe } k \text{ dans le voxel } j; \\ E_j : \text{émissions totales dans voxel } j. \end{cases}$$

Mise en pratique :

1. Restriction à un champ de vue utile $\mathcal{V}' \subset \mathcal{V}$;
2. simulation de $n \approx 10^{11}$ émissions 3γ uniformes $\mathcal{U}(\frac{1}{8}\mathcal{V}')$;
3. propagation par symétries (révolution + réflexion);
4. discrétisation de $\mathcal{V}'$ en voxels.

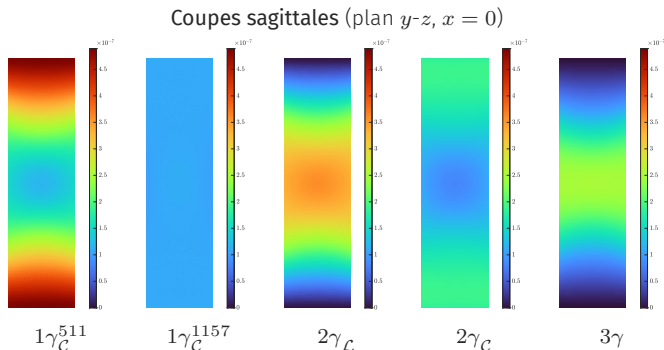
Champ de vue utile $\mathcal{V}' \subset \mathcal{V}$

$R = 35 \text{ mm}$, $H = 240 \text{ mm}$



Estimation Monte-Carlo des vecteurs de sensibilité : coupes sagittales de γ'

Discrétisation en voxels de 1 mm^3 :



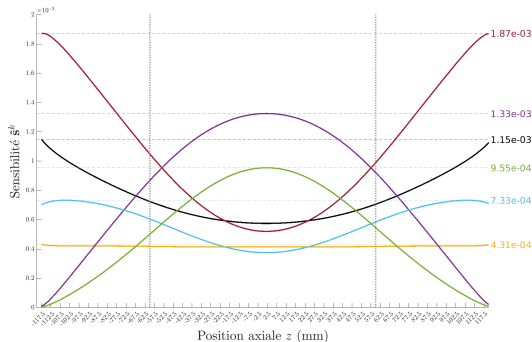
Observations :

Variations très lisses : absence de hautes fréquences;

Variations radiales très légères devant les variations axiales;

↪ Propriété du détecteur : Milieu de détection continu ↪ aucune rupture géométrique.

Estimation Monte-Carlo des vecteurs de sensibilité : profils axiaux de γ'



Analyse des profils

3γ & $2\gamma_c$: profil en cloche

→ Angle solide maximal au centre.

$1\gamma_c^{511}$ & $2\gamma_c$: profil inversé

→ Par complémentarité des autres classes.

$1\gamma_c^{1157}$: profil uniforme.

Partie 1 : Définition du modèle direct

Expression d'un modèle direct multiclasse

Développement de l'opérateur de projection Compton

Evaluation de l'opérateur de projection Compton

Détection des voxels contributifs pour l'imagerie Compton

Développement de l'opérateur de projection 3γ

Partie 2 : Résolution du problème inverse

Algorithme de reconstruction multiclasse

Evaluation des vecteurs de sensibilité

Mise en œuvre dans CASToR

Conclusion et perspectives

Point de départ : framework CASToR¹⁸

Logiciel de reconstruction tomographique **open source** (émission : TEP/TEMP, transmission : CT) intégrant :

des **opérateurs de projection standards**, *e.g.* l'algorithme de Siddon¹⁹ ;

des **algorithmes itératifs** de reconstruction, *e.g.* **MLEM**²⁰ et **OSEM**²¹ ;

la prise en charge des données en **mode liste**.

Adaptations développées pour XEMIS2

Nouveau format de données pour prendre en compte le **milieu de détection continu** ;

Nouveaux opérateurs de projection pour les événements $1\gamma_c$ et 3γ , incluant le **screening analytique** ;

Algorithme de reconstruction multiclasse pour obtenir une **unique** image de la distribution radioactive.

Evaluation :

Développement d'un simulateur Monte-Carlo **Pollux** pour générer des données synthétiques à partir d'une géométrie **idéalisée** de XEMIS2.

¹⁸ Merlin et al., 2018

¹⁹ Siddon, 1985

²⁰ Vardi et al., 1985

²¹ Hudson et al., 1994

Partie 1 : Définition du modèle direct

Expression d'un modèle direct multiclasse

Développement de l'opérateur de projection Compton

Evaluation de l'opérateur de projection Compton

Détection des voxels contributifs pour l'imagerie Compton

Développement de l'opérateur de projection 3γ

Partie 2 : Résolution du problème inverse

Algorithme de reconstruction multiclasse

Evaluation des vecteurs de sensibilité

Mise en œuvre dans CASToR

Conclusion et perspectives

Contexte de ces travaux : XEMIS2

Un prototype de caméra Compton au Xénon Liquide dédié à l'imagerie 3γ ;

Les méthodes de reconstruction utilisées jusqu'à présent :

- exploitent uniquement les détections **complètes** 3γ : intersection unique $\mathcal{L}/\mathcal{C}$;
- ignorent les détections **partielles** pourtant majoritaires.

Question de recherche : approche multiclasse

Comment exploiter la **totalité** des classes de détection pour reconstruire une image de la distribution radioactive ?

Contributions :

Deux niveaux de contribution :

1. **Intégration de l'information Compton** : un opérateur de projection original et un algorithme de détection efficace des voxels contributifs;
2. **Méthode de reconstruction multiclasse** : un algorithme de reconstruction permettant de reconstruire une image unique à partir de plusieurs classes d'événements.

L'ensemble implémenté dans un **logiciel de reconstruction** CASToR et testé sur des données Pollux.

Etape 1 : évaluation de l'apport de l'approche multiclasse pour XEMIS2

1. Application des reconstructions sur différents **fantômes de test** :
point source, lignes sources et fantômes cylindriques;
2. Reconstruction d'images par classes :
 $1\gamma_C^{1157}$, $2\gamma_C$, 3γ seules et combinées;
3. Evaluation des images en termes de **métriques d'imagerie** :
Rapport signal sur bruit, contraste, résolution spatiale;
4. Evaluation de l'**apport informationnel** de chaque classe via la **matrice d'information de Fisher**.

Etape 2 : évaluation de l'opérateur de projection Compton par déformation pour la reconstruction

1. Comparaison des opérateurs de projection $1\gamma_C$ et 3γ à ceux de la littérature;
2. Étude de l'impact des troncatures du *screening* : compromis temps de calcul / qualité d'image reconstruite.

Étape 3 : extensions vers les données réelles et généralisation

1. Mise en œuvre de la **régularisation par pénalisation** dans l'algorithme multiclasse :

Le problème de reconstruction tomographique étant **mal-conditionné**, les approches régularisées **s'avèrent indispensables** pour stabiliser l'inversion.

2. Application sur **données réelles** issues de XEMIS2 :

Données plus réalistes, intégrant notamment les problématiques **multi-séquences**;

Extension **multi-séquences** de l'algorithme multiclasse;

3. **Généralisation** de la méthodologie :

Adaptation à d'autres caméras Compton et prototypes 3γ *e.g.* WGI ²²

Plus généralement : tout système acquérant **plusieurs classes** d'événements simultanément

²²Yoshida et al., 2020



Vous remerciant pour votre attention

Questions ?

- Agostinelli, S. et al. (2003). “Geant4—a simulation toolkit”. In: *Nuclear Instruments and Methods in Physics Research Section A: Accelerators, Spectrometers, Detectors and Associated Equipment* 506.3, pp. 250–303.
- Barrett, H. et al. (1997). “List-mode likelihood”. In: *J. Opt. Soc. Am. (A)* 14.11, p. 2914.
- Beaupère, N. (Dec. 20, 2016). “XEMIS2 – Analyse de la déconvolution d’image”. Présentation interne, réunion SUBATECH. Nantes, France.
- Berger, M. et al. (n.d.). *XCOM: Photon Cross Sections Database*.
- Bossis, T. (July 8, 2024). “Imagerie médicale Compton avec la caméra XEMIS2”. Workshop reconstruction multiphotonique.
- Dempster, A. P. et al. (1977). “Maximum likelihood from incomplete data via the *EM* algorithm”. In: *J. R. Statist. Soc. B* 39.1, pp. 1–22.
- Gallego Manzano, L. (July 2016). “Optimization of a single-phase liquid xenon Compton camera for 3γ medical imaging”. Thèse de doctorat. Ecole des Mines de Nantes.
- Gallego Manzano, L. et al. (2018). “XEMIS2: A liquid xenon detector for small animal medical imaging”. In: *Nucl. Instrum. Methods Phys. Res. A* 912, pp. 329–332.
- Giovagnoli, D. et al. (2021). “A pseudo-TOF image reconstruction approach for three-gamma small animal imaging”. In: *IEEE Trans. Radiat. Plasma Med. Sci.* 5.6, pp. 826–834.

- Hudson, H. et al. (1994). “Accelerated image reconstruction using ordered subsets of projection data”. In: *IEEE Transactions on Medical Imaging* 13.4, pp. 601–609.
- Kim, S. et al. (2007). “Two approaches to implementing projector–backprojector pairs for 3D reconstruction from Compton scattered data”. In: *Nuclear Instruments and Methods in Physics Research Section A: Accelerators, Spectrometers, Detectors and Associated Equipment* 571.1. Proceedings of the 1st International Conference on Molecular Imaging Technology, pp. 255–258.
- Le Loirec, C. et al. (2007). “Track structure simulation for positron emitters of medical interest. Part I: The case of the allowed decay isotopes”. In: *Nuclear Instruments and Methods in Physics Research Section A: Accelerators, Spectrometers, Detectors and Associated Equipment* 582.2, pp. 644–653.
- Lojacono, X. (Nov. 2013). “Image reconstruction for Compton camera with application to hadrontherapy”. Thèse de doctorat. INSA de Lyon.
- Maxim, V. et al. (2016). “Probabilistic models and numerical calculation of system matrix and sensitivity in list-mode MLEM 3D reconstruction of Compton camera images”. In: *Phys. Med. Biol.* 61.1, pp. 243–264.
- Mellak, Y. et al. (2025). “Direct3 γ : a Pipeline for Direct Three-gamma PET Image Reconstruction”. In: *IEEE Transactions on Radiation and Plasma Medical Sciences*, pp. 1–1.
- Merlin, T. et al. (2018). “CASToR: a generic data organization and processing code framework for multi-modal and multi-dimensional tomographic reconstruction”. In: *Phys. Med. Biol.* 63.18, p. 185005.

- Mohammadi, A. et al. (2022). "Feasibility of triple gamma ray imaging of ^{10}C for range verification in ion therapy". In: *Phys. Med. Biol.* 67.16, p. 165001.
- Ordonez, C. et al. (1997). "Dependence of angular uncertainties on the energy resolution of Compton cameras". In: *1997 IEEE Nuclear Science Symposium Conference Record*. Vol. 2. Albuquerque, NM, USA: IEEE, pp. 1122–1125.
- Parra, L. et al. (1998). "List-mode likelihood: EM algorithm and image quality estimation demonstrated on 2-D PET". In: *IEEE Trans. Med. Imag.* 17.2, pp. 228–235.
- Pauwels, E. et al. (2018). "Somatostatin receptor PET ligands-the next generation for clinical practice". In: *American Journal of Nuclear Medicine and Molecular Imaging* 8.5, p. 311.
- Siddon, R. L. (Mar. 1985). "Fast calculation of the exact radiological path for a three-dimensional CT array". In: *Medical Physics* 12.2, pp. 252–255.
- Vardi, Y. et al. (1985). "A statistical model for positron emission tomography". In: *J. Amer. Statist. Assoc.* 80.389, pp. 8–20.
- Wilderman, S., N. Clinthorne, et al. (1998). "List-mode maximum likelihood reconstruction of Compton scatter camera images in nuclear medicine". In: *1998 IEEE NSS/MIC*, pp. 1716–1720.
- Wilderman, S., W. Rogers, et al. (1998). "Fast algorithm for list mode back-projection of Compton scatter camera data". In: *IEEE Transactions on Nuclear Science* 45.3, pp. 957–962.
- Yoshida, E. et al. (2020). "Whole gamma imaging: a new concept of PET combined with Compton imaging". In: *Phys. Med. Biol.* 65.12, p. 125013.



Backup slides

Expression du modèle direct - le terme de fond :

Le terme $\bar{\varepsilon}^k$ regroupe plusieurs contributions :

Diffusions dans l'objet : photons déviés par interactions;

Événements fortuits : coïncidences accidentelles;

Élargissement Doppler : électron cible non au repos lors de la diffusion Compton;

Rayonnement de fond : radioactivité naturelle (^{40}K), rayonnement cosmique, ...

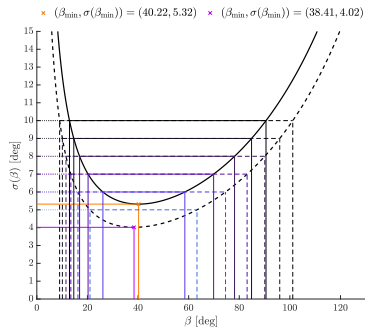
Contexte XEMIS2 :

Négligeabilité du terme de contribution de fond pour l'ensemble des classes :

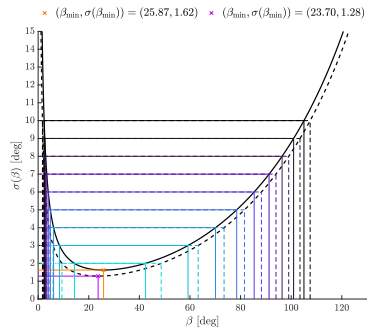
$$\bar{\varepsilon}^k \approx 0 \quad \forall k \in \llbracket 1, K \rrbracket$$

Terme d'incertitude angulaire $\sigma(\beta)$

$$\sigma(\tilde{\beta}) := \frac{m_e c^2 \sigma(\tilde{E}_1)}{\sin(\tilde{\beta}) (E_0 - \tilde{E}_1)^2}$$



(a) $E_0 = 0.511$ MeV

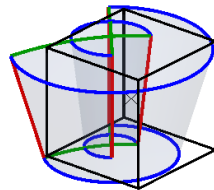


(b) $E_0 = 1.157$ MeV

Problème avec la boîte sphérique :

Voxels proches des pôles ou traversés par l'axe du cône :

- Boîte sphérique déborde du voxel initial ($\delta\varphi > \pi$);
- Masse projetée au-delà du voxel réel (perte de convexité).



Solution : shrinkage

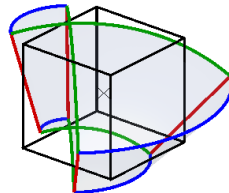
Principe : Réduire localement la taille du voxel $\check{v}_j$.

1. Construire une boîte réduite B' avec $\delta\rho'$;
2. Évaluer $\check{T}'_j(\cdot)$ sur B' et corriger par le ratio des volumes :

$$\check{T}_j^{1\gamma c}(\mathbf{Y}) = \check{T}'_j^{1\gamma c}(\mathbf{Y}) \times c_{\text{vol}} \text{ avec } c_{\text{vol}} := \frac{\text{vol}(\check{v}_j)}{\text{vol}(\check{v}'_j)}$$

Propriété du shrinkage :

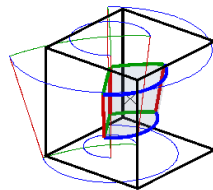
$$\lim_{\text{vol}(\check{v}'_j) \rightarrow 0} \int_{M \in B'} g_\beta(M) dv \times c_{\text{vol}} \approx \hat{T}_j(\mathbf{Y}).$$



Problème avec la boîte sphérique :

Voxels proches des pôles ou traversés par l'axe du cône :

- Boîte sphérique déborde du voxel initial ($\delta\varphi > \pi$);
- Masse projetée au-delà du voxel réel (perte de convexité).



Solution : shrinkage

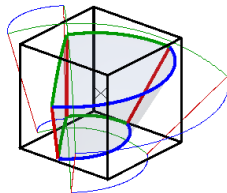
Principe : Réduire localement la taille du voxel $\check{v}_j$.

1. Construire une boîte réduite B' avec $\delta\rho'$;
2. Évaluer $\check{T}'_j(\cdot)$ sur B' et corriger par le ratio des volumes :

$$\check{T}_j^{1\gamma c}(\mathbf{Y}) = \check{T}'_j^{1\gamma c}(\mathbf{Y}) \times c_{\text{vol}} \text{ avec } c_{\text{vol}} := \frac{\text{vol}(\check{v}_j)}{\text{vol}(\check{v}'_j)}$$

Propriété du shrinkage :

$$\lim_{\text{vol}(\check{v}'_j) \rightarrow 0} \int_{M \in B'} g_\beta(M) dv \times c_{\text{vol}} \approx \hat{T}_j(\mathbf{Y}).$$



Opérateur de projection Compton – Comparaison numérique : $\beta = 25$ deg

Méthodes comparées :

- SV_0 : centre-voxel
- SV_1, SV_2, SV_3 : sur-voxelisation
- $DF-NCC_2$: déformation géométrique

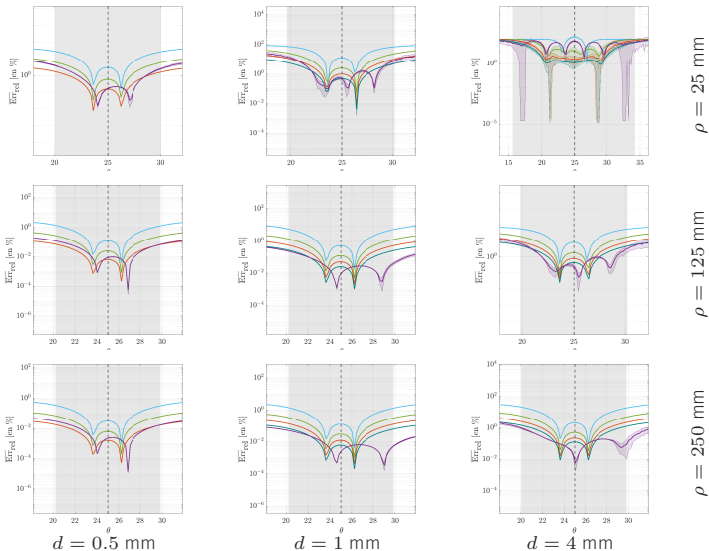
Protocole :

Paramètres variés :

- Angle Compton : $\beta \in \{25, 35, 45\}$ deg;
- Distance : $\rho \in \{25, 125, 250\}$ mm;
- Taille voxel : $d \in \{0.5, 1, 4\}$ mm.

Métrique : Erreur relative (%)

- Référence : T^∞ (asymptote);
- Méthode : $SV_{N_{\max}}, d_{\min} = 0.125$ mm;
- Moyenne sur $N_R = 100$ rotations aléatoires;
- Zone : $\text{norm}(T^\infty) \geq 10^{-3}$.



Opérateur de projection Compton – Comparaison numérique : $\beta = 45$ deg

Méthodes comparées :

- SV_0 : centre-voxel
- SV_1, SV_2, SV_3 : sur-voxélisation
- $DF-NCC_2$: déformation géométrique

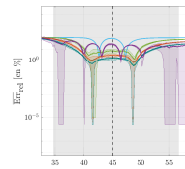
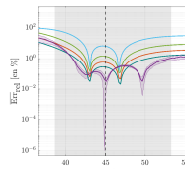
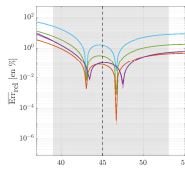
Protocole :

Paramètres variés :

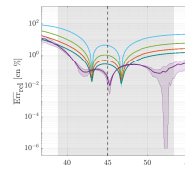
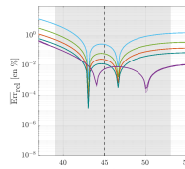
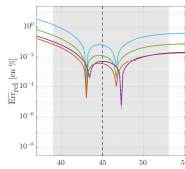
- Angle Compton : $\beta \in \{25, 35, 45\}$ deg;
- Distance : $\rho \in \{25, 125, 250\}$ mm;
- Taille voxel : $d \in \{0.5, 1, 4\}$ mm.

Métrique : Erreur relative (%)

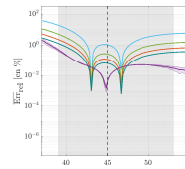
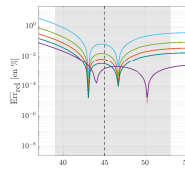
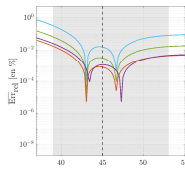
- Référence : T^∞ (asymptote);
- Méthode : $SV_{N_{\max}}, d_{\min} = 0.125$ mm;
- Moyenne sur $N_R = 100$ rotations aléatoires;
- Zone : $\text{norm}(T^\infty) \geq 10^{-3}$.



$\rho = 25$ mm



$\rho = 125$ mm



$\rho = 250$ mm

$d = 0.5$ mm

$d = 1$ mm

$d = 4$ mm

Rappel sur la coquille $\mathcal{S}$:

Pour un angle mesuré β et un seuil $\tau > 0$ fixé :

$$\Psi(\beta, \tau) := \left\{ \tilde{\beta} \in [0, \pi] : g_{\beta}(\tilde{\beta}) \geq \tau \right\}$$

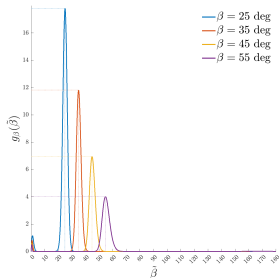
permet de construire la coquille conique $\mathcal{S}(V_1, \vec{n}, \beta)$.

Problème :

Pour $\tau = 10^{-5}$, $\Psi(\beta, \tau)$ n'est généralement pas connexe :

$$\Psi(\beta, \tau) = \underbrace{\Psi^f(\beta, \tau)}_{\mathcal{S}_R^f} \cup \underbrace{\Psi^c(\beta, \tau)}_{\mathcal{S}^c} \cup \underbrace{\Psi^b(\beta, \tau)}_{\mathcal{S}_R^b}$$

↪ jusqu'à trois coquilles coniques disjointes ...



Rappel sur la coquille $\mathcal{S}$:

Pour un angle mesuré β et un seuil $\tau > 0$ fixé :

$$\Psi(\beta, \tau) := \left\{ \tilde{\beta} \in [0, \pi] : g_{\beta}(\tilde{\beta}) \geq \tau \right\}$$

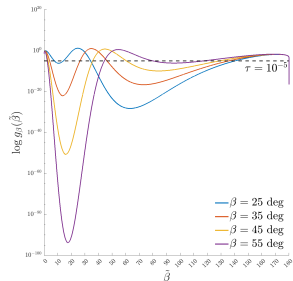
permet de construire la coquille conique $\mathcal{S}(V_1, \vec{n}, \beta)$.

Problème :

Pour $\tau = 10^{-5}$, $\Psi(\beta, \tau)$ n'est généralement pas connexe :

$$\Psi(\beta, \tau) = \underbrace{\Psi^f(\beta, \tau)}_{\mathcal{S}_R^f} \cup \underbrace{\Psi^c(\beta, \tau)}_{\mathcal{S}^c} \cup \underbrace{\Psi^b(\beta, \tau)}_{\mathcal{S}_R^b}$$

↪ jusqu'à trois coquilles coniques disjointes ...



Rappel sur la coquille $\mathcal{S}$:

Pour un angle mesuré β et un seuil $\tau > 0$ fixé :

$$\Psi(\beta, \tau) := \left\{ \tilde{\beta} \in [0, \pi] : g_{\beta}(\tilde{\beta}) \geq \tau \right\}$$

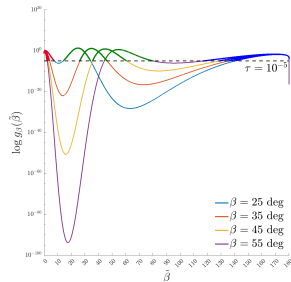
permet de construire la coquille conique $\mathcal{S}(V_1, \vec{n}, \beta)$.

Problème :

Pour $\tau = 10^{-5}$, $\Psi(\beta, \tau)$ n'est généralement pas connexe :

$$\Psi(\beta, \tau) = \underbrace{\Psi^f(\beta, \tau)}_{\mathcal{S}_R^f} \cup \underbrace{\Psi^c(\beta, \tau)}_{\mathcal{S}^c} \cup \underbrace{\Psi^b(\beta, \tau)}_{\mathcal{S}_R^b}$$

↪ jusqu'à trois coquilles coniques disjointes ...



Rappel sur la coquille $\mathcal{S}$:

Pour un angle mesuré β et un seuil $\tau > 0$ fixé :

$$\Psi(\beta, \tau) := \left\{ \tilde{\beta} \in [0, \pi] : g_{\beta}(\tilde{\beta}) \geq \tau \right\}$$

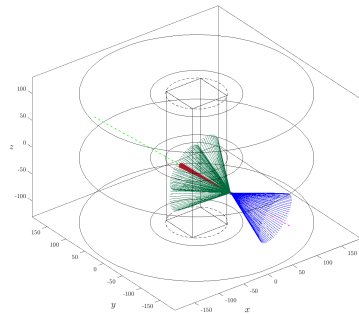
permet de construire la coquille conique $\mathcal{S}(V_1, \vec{n}, \beta)$.

Problème :

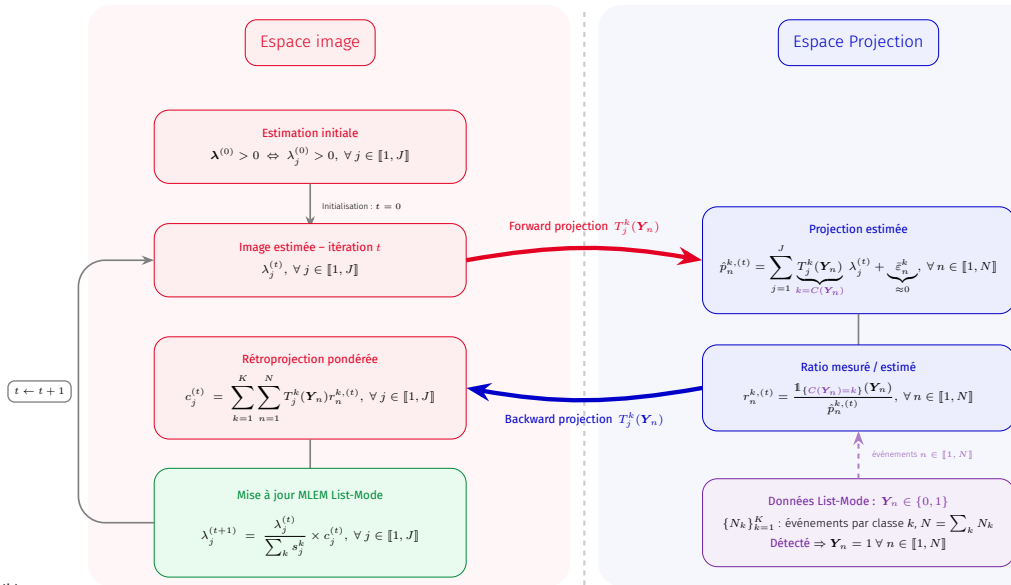
Pour $\tau = 10^{-5}$, $\Psi(\beta, \tau)$ n'est généralement pas connexe :

$$\Psi(\beta, \tau) = \underbrace{\Psi^f(\beta, \tau)}_{\mathcal{S}_R^f} \cup \underbrace{\Psi^c(\beta, \tau)}_{\mathcal{S}^c} \cup \underbrace{\Psi^b(\beta, \tau)}_{\mathcal{S}_R^b}$$

↪ jusqu'à trois coquilles coniques disjointes ...



Algorithme List-mode MLEM multi-classe



Cadre multi-séquence : lever l'ambiguïté d'ordre des interactions

Idée

Un même photon peut produire plusieurs **séquences d'interactions** plausibles dans le détecteur $\Rightarrow$ modéliser l'évènement comme un **mélange** de séquences.

Structure d'un évènement (classe connue)

$$\mathbf{Y}_n = \left\{ c_n, (\mathbf{y}_{n,w}, \alpha_{n,w})_{w=1}^{W_n} ; \sum_{w=1}^{W_n} \alpha_{n,w} = 1 \right\}.$$

$\alpha_{n,w}$: **poids a priori** (modèle évènement), indépendant de λ ;

$\mathbf{y}_{n,w}$: observation si la séquence w est vraie (ex. permutation de $(V_1, E_1), (V_2, E_2)$).

Projection multi-séquence

$$T_j(\mathbf{Y}_n) = \sum_{w=1}^{W_n} \alpha_{n,w} T_j(\mathbf{y}_{n,w}).$$

$$\zeta_{n,w}^{(t)} = \frac{\alpha_{n,w} \sum_{j'} \tilde{\lambda}_{j'}^{(t)} T_{j'}(\mathbf{y}_{n,w})}{\sum_{w'} \alpha_{n,w'} \sum_{j'} \tilde{\lambda}_{j'}^{(t)} T_{j'}(\mathbf{y}_{n,w'})}.$$

$\zeta_{n,w}^{(t)}$: **poids a posteriori** (responsabilité).

Conséquence algorithmique (LM-MLEM)

$$\tilde{\lambda}_j^{(t+1)} = \frac{\tilde{\lambda}_j^{(t)}}{\sum_{k=1}^K s_j^k} \sum_{n=1}^N \sum_{w=1}^{W_n} \zeta_{n,w}^{(t)} \frac{T_j(\mathbf{y}_{n,w})}{\sum_{j'} \tilde{\lambda}_{j'}^{(t)} T_{j'}(\mathbf{y}_{n,w})}.$$

Principe : simuler une désintégration 3γ et suivre les trois photons par *ray-tracing*.

Géométrie : rayon/plans, rayon/cylindres

Géométrie **simplifiée** de XEMIS2;

Trajectoire paramétrée : $V = M + t \times d, t \in \mathbb{R}_+$;

Intersections $\Rightarrow$ résolution d'équations quadratiques classiques.

Physique : interactions & transport des photons ²³

Libre parcours moyen : inversion de la fonction de répartition;

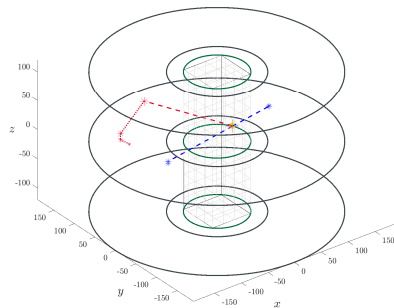
Type d'interaction : tirage uniforme sur $]0, 1[$ (Compton, Rayleigh[†], photo-électrique);

Diffusion Klein-Nishina : acceptation-rejet façon Geant4 ²⁴.

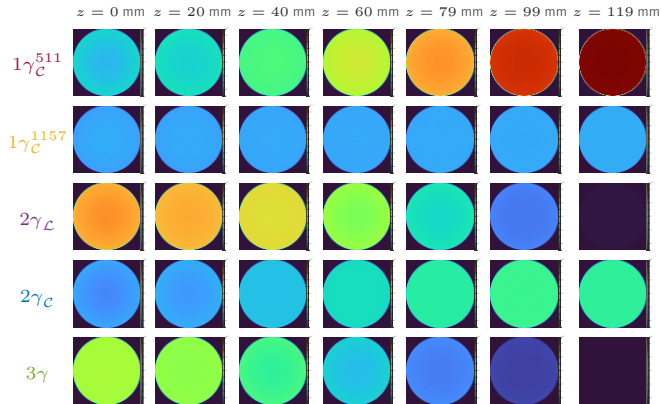
[†] Rayleigh négligé (effet minoritaire pour ^{44}Sc).

Simplifications assumées

Diffusion/atténuation/acolinéarité dans $\mathcal{V}$ **négligées**, Parcours du positon $\sim \mathcal{N}_+(2.4, 4)$ mm $\rightsquigarrow$ valeurs encore théoriques ^{25 26}.



Estimation Monte-Carlo des vecteurs de sensibilité : coupes axiales de γ'



Observations

- Invariance par rotation autour de l'axe z confirmée;
- Reprend les variations axiales observées dans les profils axiaux;